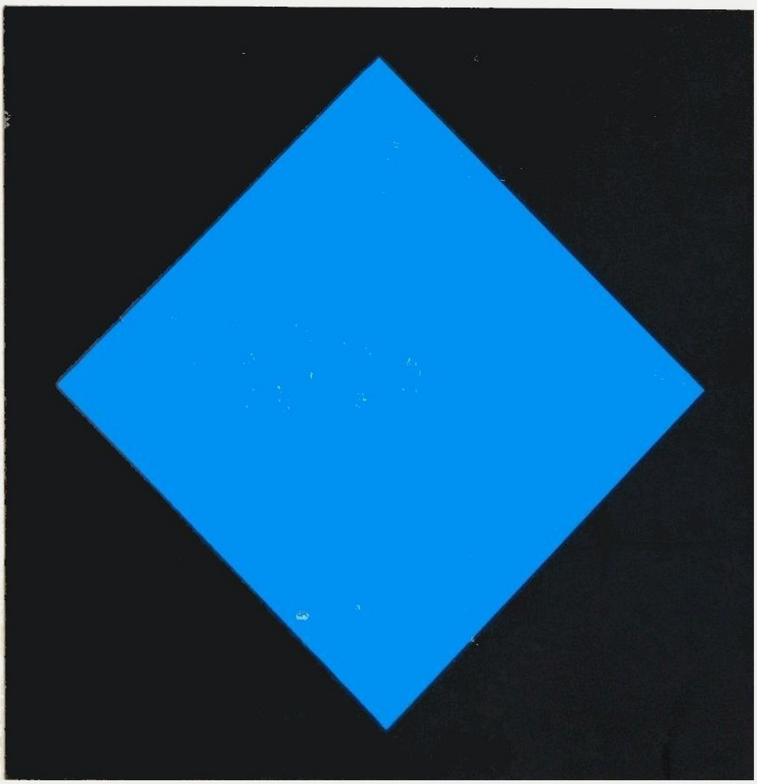
F. R. GANTMACHER

LEZIONI DI MECCANICA ANALITICA



EDITORI RIUNITI

Nuova biblioteca di cultura 210
Collana diretta da Ignazio Ambrogio

Serie scientifica
a cura di Carlo Bernardini

Feliks Ruvimovič Gantmacher

Lezioni di meccanica analitica

Editori Riuniti Edizioni Mir

I edizione: settembre 1980
Titolo originale: *Lektsii po analitičeskoj mechanike*
Traduzione di Gianni Federici
© Copyright by Edizioni Mir, Mosca
© Copyright by Editori Riuniti
Via Serchio, 9/11 - 00198 Roma
CL 63-2148-8

Indice

7 *Prefazione*

9 I. Equazioni differenziali del moto di un sistema arbitrario di particelle

§ 1. Sistemi liberi e vincolati. Vincoli e loro classificazione p. 9 — § 2. Spostamenti possibili e virtuali. Vincoli ideali p. 12 — § 3. Equazione generale della dinamica. Equazioni di Lagrange del primo tipo p. 21 — § 4. Principio degli spostamenti virtuali. Principio di D'Alembert p. 25 — § 5. Sistemi olonomi. Coordinate indipendenti. Forze generalizzate p. 35 — § 6. Equazioni di Lagrange del secondo tipo in coordinate indipendenti p. 41 — § 7. Studio delle equazioni di Lagrange p. 46 — § 8. Teorema della variazione dell'energia totale. Forze potenziali, dissipative e giroscopiche p. 49 — § 9. Analogie elettromeccaniche p. 55 — § 10. Equazoni di Appell per sistemi non olonomi. Pseudocoordinate p. 58.

67 II. Equazioni del moto in un campo potenziale

§ 11. Equazioni di Lagrange per forze potenziali. Potenziale generalizzato. Sistemi non naturali p. 67 — § 12. Equazioni canoniche di Hamilton p. 72 — § 13. Equazioni di Routh p. 79 — § 14. Coordinate cicliche p. 81 — § 15. Parentesi di Poisson p. 84.

89 III. Principio variazionale e invarianti integrali

§ 16. Principio di Hamilton p. 89 — § 17. Seconda forma del principio di Hamilton p. 97 — § 18. Invariante integrale di base della meccanica (invariante integrale di Poincaré — Cartan) p. 99 — § 19. Interpretazione idrodinamica dell'invariante integrale di base. Teoremi di Thomson e Helmholtz sulla circolazione e sui vortici p. 106 — § 20. Sistemi conservativi generalizzati. Equazioni di Whittaker. Equazioni di Jacobi. Principio di minima azione di Maupertuis — Lagrange p. 111 — § 21. Moto inerziale. Linee geodetiche in un moto arbitrario di un sistema conservativo p. 117 — § 22. Invariante integrale universale di Poincaré. Teorema di Lee Hwa-chung p. 119 — § 23. Invarianza del volume nello spazio delle fasi. Teorema di Liouville p. 125.

129 IV. Trasformazioni canoniche ed equazioni di Hamilton—Jacobi

§ 24. Trasformazioni canoniche p. 129 — § 25. Trasformazioni canoniche libere p. 133 — § 26. Equazione di Hamilton — Jacobi p. 136 — § 27. Metodo della separazione delle variabili. Esempi p. 142 — § 28. Trasformazioni canoniche applicate alla teoria delle perturbazioni p. 151 — § 29. Struttura di una trasformazione canonica arbitraria p. 153 — § 30. Criterio di canonicità di una trasformazione. Parentesi di Lagrange p. 158 — § 31. Natura simpliciale della matrice jacobiana di una trasformazione canonica p. 161 — § 32. Invarianza della parentesi di Poisson in una trasformazione canonica p. 163.

166 V. Stabilità dell'equilibrio e moti di un sistema

§ 33. Teorema di Lagrange sulla stabilità di una posizione di equilibrio p. 166 — § 34. Criterio d'instabilità di una posizione di equilibrio. Teoremi di Ljapunov e di Četaev p. 173 — § 35. Stabilità asintotica di una posizione di equilibrio. Sistemi dissipativi p. 176 — § 36. Stabilità condizionata. Formulazione generale del problema. Stabilità del moto o di un processo arbitrario. Teorema di Ljapunov p. 182 — § 37. Stabilità dei sistemi lineari p. 189 — § 38. Stabilità nell'approssimazione lineare p. 193 — § 39. Criteri di stabilità asintotica di sistemi lineari p. 198.

203 VI. Piccole oscillazioni

§ 40. Piccole oscillazioni di un sistema conservativo p. 203 — § 41. Coordinate normali p. 212 — § 42. Effetto delle forze periodiche esterne sulle oscillazioni di un sistema conservativo p. 215 — § 43. Proprietà estremali delle frequenze di un sistema conservativo. Teorema di Rayleigh sulla variazione delle frequenze con la variazione dell'inerzia e della rigidità del sistema. Sovrapposizione dei vincoli p. 217 — § 44. Piccole oscillazioni dei sistemi elastici p. 222 — § 45. Piccole oscillazioni di un sistema scleronomo sotto l'azione di forze non esplicitamente dipendenti dal tempo p. 228 — § 46. Funzione dissipativa di Rayleigh. Effetto di piccole forze dissipative sulle oscillazioni di un sistema conservativo p. 231 — § 47. Effetto di una forza esterna dipendente dal tempo sulle piccole oscillazioni di un sistema scleronomo. Caratteristica ampiezza-fase p. 235.

241 VII. Sistemi con coordinate cicliche

§ 48. Sistema ridotto. Potenziale di Routh. Moti incogniti. Concezione di Hertz dell'origine cinetica dell'energia potenziale p. 241 — § 49. Stabilità dei moti stazionari p. 251.

258 *Indice analitico*

Prefazione

Nella letteratura che tratta di meccanica non c'è una sola interpretazione universalmente accettata del termine « meccanica analitica ». Alcuni autori identificano la meccanica analitica come meccanica teorica [1]. *Altri sostengono che un'esposizione in coordinate generalizzate costituisca la caratteristica che distingue la meccanica analitica. Un terzo punto di vista, al quale aderisce l'autore di questo libro, consiste nel fatto che la meccanica analitica è caratterizzata sia dallo specifico sistema di rappresentazione, sia da un insieme definito dei problemi trattati.*

La caratteristica del sistema di rappresentazione della meccanica analitica è che i princìpi generali (differenziali o integrali) servono come fondamenti, e le equazioni differenziali del moto di base derivano analiticamente da questi princìpi. Il contenuto base della meccanica analitica consiste nella descrizione dei princìpi generali della meccanica, da cui derivano le equazioni differenziali fondamentali del moto, e di cui si studiano le equazioni ottenute e i metodi per la loro interpretazione.

La meccanica analitica costituisce una parte del corso di meccanica teorica che è compresa nel programma dei corsi di meccanica matematica, fisica ed ingegneria fisica delle università e delle scuole superiori. Finora il programma generale di meccanica teorica degli istituti tecnici non contiene la meccanica analitica, ne mantiene soltanto degli elementi, benché la moderna tecnologia ponga problemi che vanno oltre il corso fondamentale di meccanica teorica diviso tradizionalmente in « statica », « cinematica » e « dinamica di particelle di un sistema ».

Gli ingegneri ricercatori, che lavorano in campi diversi della moderna tecnologia, devono anche affrontare i metodi generali della meccanica analitica, che forniscono un apparato analitico universale, per investigare problemi complessi in riferimento non solo

[1] Per esempio, i noti corsi di meccanica teorica di G. K. Suslov e Ch. de la Vallée-Poussin furono chiamati corsi di meccanica analitica dagli autori.

ai fenomeni puramente meccanici, ma anche elettrici ed elettromeccanici.

Il presente testo non pretende di coprire completamente il campo della meccanica analitica. È stato sviluppato da un corso di lezioni date dall'autore lungo un periodo di sei anni all'Istituto fisico-tecnico di Mosca. Questa circostanza ha determinato la scelta del materiale e del modo di presentarlo.

Il corso di meccanica analitica è di base per le sezioni della fisica teorica quali la meccanica quantistica, la teoria della relatività ristretta e generale e così via. Per questo motivo viene data una presentazione dettagliata dei princìpi variazionali e degli invarianti integrali della meccanica, delle trasformazioni canoniche, dell'equazione di Hamilton — Jacobi, e dei sistemi a coordinate cicliche (ignorabili) (capitoli II, III, IV, VII); seguendo le idee di Poincaré e Cartan, l'autore usa gli invarianti integrali della meccanica come base dell'esposizione. Qui essi non rappresentano un « abbellimento » della teoria, ma il suo reale strumento quotidiano.

Le applicazioni tecniche sono associate al considerare sistemi vincolati che vengono studiati dettagliatamente nel capitolo I. In una sezione speciale di quel capitolo dedicata alle analogie elettromeccaniche si investiga la possibilità di estendere i metodi analitici della meccanica a sistemi elettrici ed elettromeccanici. Nei capitoli V e VI vengono date applicazioni della meccanica analitica alla teoria della stabilità di Ljapunov ed alla teoria delle oscillazioni. Elementi di moderni metodi di frequenza vengono esposti diffusamente insieme a problemi classici nella teoria delle oscillazioni lineari. Problemi della dinamica di corpi rigidi sono trattati in esempi singoli.

Si assume che il lettore abbia confidenza con i fondamenti generali della meccanica teorica e della matematica superiore. Il testo è concepito per studenti universitari dei dipartimenti di meccanica matematica, fisica ed ingegneria fisica ed anche per gli ingegneri ricercatori ed altri specialisti che sentono il bisogno di estendere ed approfondire la loro conoscenza nel campo della meccanica.

I. Equazioni differenziali del moto di un sistema arbitrario di particelle

§ 1. *Sistemi liberi e vincolati. Vincoli e loro classificazione*

Il moto di un sistema di particelle P_ν ($\nu = 1, \ldots, N$) è studiato rispetto ad un qualunque sistema inerziale (galileiano) di coordinate. Si pone che la posizione e la velocità delle particelle del sistema sono restrizioni di natura geometrica o cinematica, chiamate *vincoli*. I sistemi con tali vincoli sono detti sistemi *vincolati* per contraddistinguerli dai sistemi *liberi*, dove tali vincoli sono assenti.

Analiticamente un vincolo è espresso dall'equazione

$$f(t, \boldsymbol{r}_\nu, \dot{\boldsymbol{r}}_\nu) = 0\,^{1}, \tag{1}$$

dove il membro sinistro include il tempo t, i vettori radiali $\boldsymbol{r}_\nu$ e le velocità $\boldsymbol{v}_\nu = \dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ di tutti i punti P_ν del sistema ($\nu = 1, \ldots, N$). Nel caso particolare in cui le velocità $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ non compaiono nell'equazione vincolare (1), il vincolo è definito *finito* o *geometrico*. Analiticamente questo è espresso come

$$f(t, \boldsymbol{r}_\nu) = 0. \tag{2}$$

Nel caso generale, il vincolo (1) è chiamato *differenziale* o *cinematico*. D'ora in poi ci limiteremo a considerare solo quei vincoli differenziali le cui equazioni contengono le velocità delle particelle in forma lineare:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{l}_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu + D = 0, \tag{3}$$

---

[1] Il punto sopra la lettera denota la differenziazione di quella data quantità rispetto al tempo. Tutti i vettori radiali sono costruiti da un solo polo che è stazionario in un dato sistema di coordinate. Inoltre, l'espressione $f(t, \boldsymbol{r}_\nu, \dot{\boldsymbol{r}}_\nu)$ è l'abbreviazione della funzione $f(t, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N, \dot{\boldsymbol{r}}_1, \ldots, \dot{\boldsymbol{r}}_N)$. Tale abbreviazione sarà usata in questo testo. Se x_ν, y_ν, z_ν sono le coordinate cartesiane di un punto P_ν in un dato sistema di coordinate ($\nu = 1, \ldots, N$), allora la funzione f può essere considerata come una funzione di $6N + 1$ variabili scalari t, x_ν, y_ν, z_ν, $\dot{x}_\nu$, $\dot{y}_\nu$, $\dot{z}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, N$). La funzione f e tutte le altre funzioni che si incontreranno in seguito sono considerate continue, come le loro derivate.

dove $\boldsymbol{l}_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ è il prodotto scalare tra i vettori $\boldsymbol{l}_\nu$ e $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$, ed il vettore $\boldsymbol{l}_\nu$ e lo scalare D sono funzioni specifiche di t e di tutte le $\boldsymbol{r}_\mu$ ($\mu, \nu = 1, \ldots, N$). Si assume qui che i vettori $\boldsymbol{l}_\nu$ non possono essere tutti contemporaneamente nulli.

Dato un vincolo finito di tipo (2), un sistema non può occupare una posizione arbitraria nello spazio in ogni determinato istante di tempo. I vincoli finiti impongono delle restrizioni sulle posizioni possibili del sistema al tempo t. Ma con un solo vincolo differenziale il sistema può occupare qualunque posizione arbitraria nello spazio in ogni istante t. In questa posizione però le velocità delle particelle del sistema non possono essere arbitrarie, poiché il vincolo differenziale impone delle restrizioni su queste velocità.

Ogni vincolo finito di tipo (2) implica, come conseguenza, un vincolo differenziale la cui equazione è ottenuta differenziando termine a termine l'equazione (2):

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \dot{\boldsymbol{r}}_\nu + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \tag{4}$$

dove $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} = \operatorname{grad}_\nu f$ ($\nu = 1, \ldots, N$) [1]. Ma tale vincolo differenziale non è equivalente al vincolo finito (2). È equivalente al vincolo finito

$$f(t, \boldsymbol{r}_\nu) = c, \tag{5}$$

dove c è una costante arbitraria. Per questa ragione il vincolo finito (4) è detto *integrabile*.

Si noti che nelle coordinate ortogonali cartesiane le equazioni dei vincoli dalla (1) alla (4) sono espresse come

$$f(t, x_\nu, y_\nu, z_\nu, \dot{x}_\nu, \dot{y}_\nu, \dot{z}_\nu) = 0, \tag{1'}$$

$$f(t, x_\nu, y_\nu, z_\nu) = 0, \tag{2'}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} (A_\nu \dot{x}_\nu + B_\nu \dot{y}_\nu + C_\nu \dot{z}_\nu) + D = 0\ ^{2}, \tag{3'}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu} \dot{x}_\nu + \frac{\partial f}{\partial y_\nu} y_\nu + \frac{\partial f}{\partial z_\nu} \dot{z}_\nu \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \tag{4'}$$

Il vincolo finito (2) o (2') è denominato *stazionario* se t non è presente esplicitamente nell'equazione del vincolo, per esempio

[1] Se $\boldsymbol{r}_\nu = x_\nu \boldsymbol{i} + y_\nu \boldsymbol{j} + z_\nu \boldsymbol{k}$, dove $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ sono i vettori di base ortogonali degli assi coordinati, si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} = \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y_\nu} \boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z_\nu} \boldsymbol{k} \quad (\nu = 1, \ldots, N).$$

[2] A_ν, B_ν e C_ν ($\nu = 1, \ldots, N$) sono funzioni scalari di t, $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N$.

$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$. In tal caso, il membro sinistro dell'equazione del vincolo differenziale (4) è una funzione lineare ed omogenea delle velocità. Analogamente, il vincolo differenziale (3) o (3′) è detto *stazionario* se $D = 0$ e se i vettori $\boldsymbol{l}_\nu$ nell'equazione (3) (e, rispettivamente, i coefficienti A_ν, B_ν e C_ν nell'equazione (3′)) non sono funzioni esplicite di t.

Un sistema di particelle è detto *olonomo* se le particelle del sistema non dipendono da vincoli differenziali non integrabili. Dunque, un sistema olonomo è un qualunque sistema libero di particelle ed anche un qualunque sistema vincolato con vincoli finiti o differenziali ma integrabili. Tutti i vincoli in un sistema olonomo possono essere scritti in forma finita.

Un sistema è detto *non olonomo* [1] se ci sono vincoli differenziali non integrabili.

Un sistema è detto *scleronomo* se si impongono solo dei vincoli stazionari, altrimenti è *reonomo*.

Esempio 1. *Una particella è vincolata a muoversi su una superficie.* L'equazione di questa superficie è data nella forma

$$f(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{6}$$

oppure

$$f(x, y, z) = 0. \tag{6′}$$

Questo è un vincolo finito stazionario.

Se la superficie è mossa oppure subisce deformazione, il tempo t compare nell'equazione della superficie in modo esplicito:

$$f(t, \boldsymbol{r}) = 0 \tag{7}$$

oppure

$$f(t, x, y, z) = 0. \tag{7′}$$

In questo caso il vincolo è finito ma non stazionario.

Esempio 2. *Due particelle sono collegate da un'asta rigida di lunghezza fissa* l. In tal caso l'equazione vincolare è della forma

$$(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)^2 - l^2 = 0 \tag{8}$$

oppure

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 = 0. \tag{8′}$$

Questo è un sistema olonomo scleronomo.

Possiamo notare che un corpo rigido può essere visto come un sistema di particelle equidistanti una dall'altra, che è soggetto a vincoli del tipo (8). Da questo punto di vista, un corpo rigido libero è un caso particolare di un sistema di particelle vincolato olonomo scleronomo.

Esempio 3. *Due particelle sono collegate da un'asta di lunghezza variabile* $l = f(t)$. L'equazione del vincolo è dunque

$$(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)^2 - f^2(t) = 0 \tag{9}$$

oppure

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - f^2(t) = 0. \tag{9′}$$

Questo è un sistema olonomo reonomo.

Esempio 4. *Due particelle in un piano sono collegate da un'asta di lunghezza costante* l *e sono vincolate a muoversi in modo tale che la velocità del punto*

[1] I vincoli differenziali non integrabili sono essi stessi frequentemente chiamati non olonomi. Qualche volta i vincoli differenziali integrabili sono detti *semiolonomi*.

medio dell'asta ha la direzione dell'asta (*il moto di un pattino su un piano*). Le equazioni vincolari sono

$$\begin{cases} z_1 = 0, \quad z_2 = 0, \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l^2 = 0, \\ \dfrac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{y_1 - y_2}. \end{cases} \tag{10}$$

Questo è un sistema non olonomo perché l'ultima equazione nella (10) definisce un vincolo differenziale non integrabile.

Oltre ai vincoli di tipo (1), che sono detti vincoli *bilaterali*, in meccanica si studiano anche i vincoli *unilaterali*, che sono espressi nella forma di disuguaglianza

$$f(t, \boldsymbol{r}_\nu, \dot{\boldsymbol{r}}_\nu) \geqslant 0. \tag{11}$$

Un esempio è il caso di due particelle collegate da un filo di lunghezza l. Questo vincolo è espresso dalla disuguaglianza

$$l^2 - (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)^2 \geqslant 0. \tag{12}$$

Se nella condizione (11) abbiamo il segno di uguaglianza, si dice che il *vincolo è rigido.*

Il moto di un sistema su cui agisce un vincolo unilaterale può essere diviso in parti tali che in alcune parti il vincolo sia rigido e il moto è come se il vincolo fosse bilaterale, e nelle altre parti il vincolo non sia rigido e il moto è come se non ci fossero dei vincoli. In altre parole in alcune parti un vincolo unilaterale o è sostituito da un vincolo bilaterale oppure è eliminato completamente. Per questa ragione *d'ora in poi considereremo solo vincoli bilaterali.*

§ 2. *Spostamenti possibili e virtuali. Vincoli ideali*

Siano imposti, su un sistema materiale, d vincoli finiti

$$f_\alpha(t, \boldsymbol{r}_\nu) = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, d) \tag{1}$$

e g vincoli differenziali [1]

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{l}_{\beta\nu} \boldsymbol{v}_\nu + D_\beta = 0 \quad (\beta = 1, \ldots, g). \tag{2}$$

Sostituiamo i vincoli finiti con i vincoli differenziali che derivano da essi:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \boldsymbol{v}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, d). \tag{3}$$

Il sistema dei vettori $\boldsymbol{v}_\nu$ sarà chiamato *velocità possibili* ad un certo istante t e ad una data posizione possibile (in quell'istante) del sistema se i vettori $\boldsymbol{v}_\nu$ soddisfano le $d + g$ equazioni (2) e (3).

[1] Nelle equazioni dei vincoli differenziali al posto di $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ scriviamo $\boldsymbol{v}_\nu$.

Dunque, *le velocità possibili sono le velocità permesse dai vincoli*. Per ogni possibile posizione del sistema all'istante t esistono infiniti sistemi di velocità possibili. Uno di questi sistemi di velocità è realizzato dal moto attuale del sistema all'istante t.

Consideriamo il sistema degli spostamenti infinitesimi

$$d\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu\, dt \quad (\nu = 1, \ldots, N), \tag{4}$$

dove $\boldsymbol{v}_\nu (\nu = 1, \ldots, N)$ sono le velocità possibili, detti *spostamenti infinitesimi possibili*, o più brevemente, *spostamenti possibili*. Moltiplicando le equazioni (2) e (3) termine a termine per dt, otteniamo le equazioni che determinano gli spostamenti possibili

$$\begin{cases} \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu}\, d\boldsymbol{r}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\, dt = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, d), \\ \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{l}_{\beta\nu}\, d\boldsymbol{r}_\nu + D_\beta\, dt = 0 \quad (\beta = 1, \ldots, g). \end{cases} \tag{5}$$

Possiamo considerare due sistemi di spostamenti possibili allo stesso istante di tempo e alla stessa posizione del sistema:

$$d\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu\, dt \text{ e } d'\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{v}'_\nu\, dt \quad (\nu = 1, \ldots, N).$$

Sia $d\boldsymbol{r}_\nu$ che $d'\boldsymbol{r}_\nu$ soddisfano le equazioni (5), mentre le differenze

$$\delta\boldsymbol{r}_\nu = d'\boldsymbol{r}_\nu - d\boldsymbol{r}_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, N) \tag{6}$$

soddisfano le relazioni omogenee

$$\begin{cases} \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu}\, \delta\boldsymbol{r}_\nu = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, d), \\ \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{l}_{\beta\nu}\, \delta\boldsymbol{r}_\nu = 0 \quad (\beta = 1, \ldots, g). \end{cases} \tag{7}$$

Le differenze $\delta\boldsymbol{r}_\nu = d'\boldsymbol{r}_\nu - d\boldsymbol{r}_\nu$ saranno dette *spostamenti virtuali*. Ogni sistema di vettori $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ che soddisfa le equazioni (7) è un sistema di spostamenti virtuali. Le equazioni (7) per gli spostamenti virtuali sono differenti dalle equazioni (5), che definiscono gli spostamenti possibili in assenza dei termini $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\, dt$ e $D_\beta dt$. Si dice, per questa ragione, che *gli spostamenti virtuali coincidono con gli spostamenti possibili nel caso di vincoli « congelati »*.

Infatti, nel « congelamento », il tempo t che appare nelle equazioni dei vincoli finiti diventa fisso, cioè il vincolo si congela e la configurazione rimane la stessa di quella al tempo t. Allora i termini $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\, dt$ non appaiono quando vengono differenziate le funzioni f_α, e le prime d equazioni (5) coincidono con le corrispon-

denti equazioni (7). Per un vincolo differenziale, « congelamento » significa imporgli un carattere stazionario, per esempio eliminando il termine D_β dal membro sinistro dell'equazione del vincolo e fissando t che appare esplicitamente nel coefficiente $l_{\beta\nu}$. Dunque, anche le ultime g equazioni (5) coincideranno con le corrispondenti equazioni (7).

Possiamo dire che gli spostamenti virtuali sono quegli spostamenti dei punti di un sistema da una possibile posizione del sistema al tempo t ad un'altra infinitamente vicina (*allo stesso istante di tempo t*).

Nel caso di vincoli stazionari, gli spostamenti virtuali coincidono con gli spostamenti possibili.

Esempio 1. *Una particella è in moto su una superficie fissa* (fig. 1).

In questo caso, qualunque vettore $\boldsymbol{v}$ costruito dal punto P e tangente alla superficie in questo punto sarà una velocità possibile. Il corrispondente

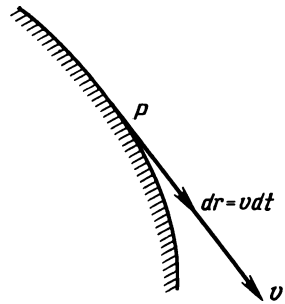


Fig. 1

spostamento possibile $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,dt$ analogamente giace sul piano tangente alla superficie nel punto P. La differenza $\delta\boldsymbol{r} = d'\boldsymbol{r} - d\boldsymbol{r}$ di due vettori tangenti è, a sua volta, un vettore tangente. Dunque, ogni vettore costruito da P e giacente sul piano tangente può essere visto sia come un dato $d\boldsymbol{r}$ che come un dato $\delta\boldsymbol{r}$. Qui il vincolo è stazionario e gli spostamenti virtuali coincidono con gli spostamenti possibili.

Esempio 2. Il vincolo è *una superficie S che è essa stessa in moto* (come corpo rigido) con velocità $\boldsymbol{u}$ rispetto al sistema di coordinate originario (fig. 2).

In questo caso la velocità possibile $\boldsymbol{v}$ è ottenuta dalla somma di un vettore arbitrario $\boldsymbol{v}_1$, che è tangente alla superficie, e della velocità $\boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{u}.$$

Quindi,

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,dt = \boldsymbol{v}_1\,dt + \boldsymbol{u}\,dt.$$

Analogamente, per qualsiasi spostamento possibile

$$d'\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_1'\,dt + \boldsymbol{u}\,dt,$$

anche lo spostamento virtuale

$$\delta\boldsymbol{r} = d'\boldsymbol{r} - d\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{v}_1' - \boldsymbol{v}_1)\,dt$$

è, a differenza di dr, un vettore che giace su un piano tangente alla superficie nel punto P (fig. 3). Il vettore δr è uno spostamento possibile per la superficie S «fermata».

In coordinate cartesiane, il vettore δr_ν è caratterizzato dalle tre proiezioni sugli assi δx_ν, δy_ν, δz_ν ($\nu = 1, \ldots, N$) e le equazioni (7) che definiscono gli spostamenti virtuali possono essere scritte nella seguente forma:

$$\begin{cases} \sum_{\nu=1}^{N} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu} \delta x_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_\nu} \delta y_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\nu} \delta z_\nu \right) = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, d), \\ \sum_{\nu=1}^{N} (A_{\beta\nu} \delta x_\nu + B_{\beta\nu} \delta y_\nu + C_{\beta\nu} \delta z_\nu) = 0 \quad (\beta = 1, \ldots, g). \end{cases} \tag{7'}$$

Se queste $d + g$ equazioni sono indipendenti allora tra i $3N$ incrementi virtuali delle coordinate δx_ν, δy_ν, δz_ν ci saranno

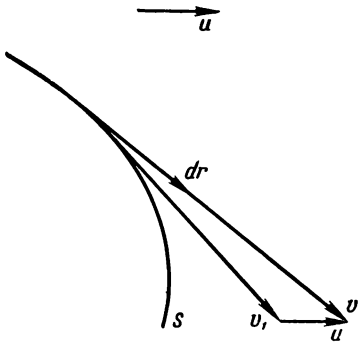


Fig. 2

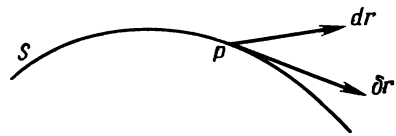


Fig. 3

$n = 3N - d - g$ incrementi virtuali indipendenti, dove n è detto *numero dei gradi di libertà* del sistema di particelle dato.

Si possono applicare rispettivamente ai punti del sistema P_ν delle forze F_ν ($\nu = 1, \ldots, N$) [1]. Se fossero assenti i vincoli allora, per la seconda legge di Newton, avremmo le relazioni $m_\nu w_\nu = F_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, N$) tra le masse m_ν, le accelerazioni w_ν e le forze F_ν. Dati i vincoli, le accelerazioni $w_\nu = \frac{1}{m_\nu} F_\nu$ (ad un dato istante t, in una data posizione delle particelle del sistema r_ν, e per le date velocità v_ν) possono essere incompatibili con i vincoli. Infatti, differenziando rispetto al tempo le equazioni (3) e (2) termine a termine, otteniamo un'espressione analitica per

[1] Per F_ν si intende la risultante di tutte le forze applicate direttamente alla particella P_ν ($\nu = 1, \ldots, N$).

le restrizioni imposte dai vincoli sulle accelerazioni $\boldsymbol{w}_\nu$ delle particelle del sistema [1]:

$$\begin{cases} \sum\limits_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \boldsymbol{w}_\nu + \sum\limits_{\nu=1}^{N} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \right) \boldsymbol{v}_\nu + \frac{d}{dt} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, d), \\ \sum\limits_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{l}_{\beta\nu} \boldsymbol{w}_\nu + \sum\limits_{\nu=1}^{N} \frac{d\boldsymbol{l}_{\beta\nu}}{dt} \boldsymbol{v}_\nu + \frac{dD_\beta}{dt} = 0 \quad (\beta = 1, \ldots, g). \end{cases} \tag{8}$$

Le accelerazioni $\boldsymbol{w}_\nu = \frac{1}{m_\nu} \boldsymbol{F}_\nu$ possono non soddisfare queste relazioni. Dunque, i vincoli materialmente effettivi agiranno sulle particelle del sistema P_ν con certe forze supplementari $\boldsymbol{R}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, N$); queste forze sono dette *forze di reazione dei vincoli* [2]. Le reazioni che sorgono sono tali che le accelerazioni determinate dalle equazioni

$$m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{R}_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, N) \tag{9}$$

sono dunque compatibili con i vincoli.

A differenza delle reazioni $\boldsymbol{R}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, N$), le forze preassegnate $\boldsymbol{F}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, N$) sono dette *forze effettive*. Le forze effettive sono normalmente specificate come funzioni conosciute del tempo, della posizione e delle velocità delle particelle del sistema [3]:

$$\boldsymbol{F}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu (t, \boldsymbol{r}_\mu, \boldsymbol{v}_\mu) \quad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{10}$$

Il problema basilare della dinamica di un sistema vincolato consiste nel seguente.

Date le forze effettive $\boldsymbol{F}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu (t, \boldsymbol{r}_\mu, \boldsymbol{v}_\mu)$ *e le posizioni iniziali* $\boldsymbol{r}_\nu^0$ *e le velocità iniziali* $\boldsymbol{v}_\nu^0$ *delle particelle del sistema* ($\nu = 1, \ldots, N$) *entrambe sono compatibili con i vincoli. Si richiede di determinare il moto del sistema e le reazioni dei vincoli* $\boldsymbol{R}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, N$) [4].

Se non si conosce nulla sulla natura dei vincoli eccetto la definizione delle equazioni (1) e (2) e, conseguentemente, non si conosce nulla sulle reazioni $\boldsymbol{R}_\nu$ prodotte da questi vincoli, allora il suddetto problema è indeterminato, poiché il numero delle quantità scalari x_ν, y_ν, z_ν, $R_{\nu x}$, $R_{\nu y}$, $R_{\nu z}$, che devono essere determinate,

---

[1] I membri sinistri nelle relazioni (8) sono linearmente dipendenti dalle accelerazioni $\boldsymbol{w}_\nu$. Come si può facilmente vedere dopo la differenziazione, questi membri sinistri sono dipendenti anche da t, $\boldsymbol{r}_\nu$, $\boldsymbol{v}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, N$).

[2] Nel caso di più vincoli ($d + g > 1$), $\boldsymbol{R}_\nu$ è la risultante di tutte le reazioni dei vincoli per il punto P_ν ($\nu = 1, \ldots, N$).

[3] Nel caso generale, il membro destro della (10) dipende da t e anche da tutti gli spostamenti $\boldsymbol{r}_\mu$, e dalle velocità $\boldsymbol{v}_\mu$ ($\mu = 1, \ldots, N$).

[4] Nel caso di un sistema libero, non c'è il problema di determinare le reazioni e dunque rimane solo il problema di determinare il moto del sistema.

è più grande del numero delle relazioni scalari possibili, cioè delle equazioni $m_\nu \ddot{x}_\nu = F_{\nu x} + R_{\nu x}$, $m_\nu \ddot{y}_\nu = F_{\nu y} + R_{\nu y}$, $m_\nu \ddot{z}_\nu = F_{\nu z} + R_{\nu z}$ e delle equazioni dei vincoli (1) e (2) ($6N > 3N + d + g$).

Affinché il problema di base della dinamica possa essere determinato, è necessario avere in più $6N - (3N + d + g) = 3N - d - g = n$ relazioni indipendenti tra le quantità ricercate. Queste relazioni possono essere ottenute se ci limitiamo all'importante classe dei *vincoli ideali*.

I vincoli sono detti *ideali, se la somma dei lavori delle reazioni di questi vincoli in ogni spostamento virtuale è nulla, cioè se*

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{R}_\nu \, \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{11}$$

Questa equazione può essere riscritta in forma esplicita:

$$\sum_{\nu=1}^{N} (R_{\nu x} \, \delta x_\nu + R_{\nu y} \, \delta y_\nu + R_{\nu z} \, \delta z_\nu) = 0. \tag{11'}$$

Tra le $3N$ quantità δx_ν, δy_ν, δz_ν ce ne sono n indipendenti ($n = 3N - d - g$ è il numero di gradi di libertà del sistema dato).

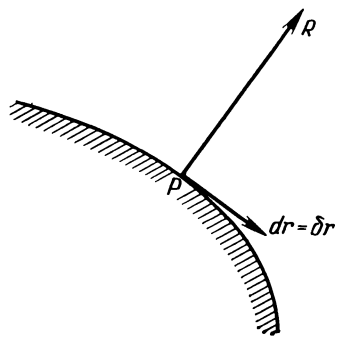


Fig. 4

È dunque possibile nella (11') esprimere i $3N - n$ incrementi dipendenti δx_ν, δy_ν, δz_ν in funzione degli n incrementi indipendenti e uguagliare a zero i coefficienti di questi incrementi indipendenti. Quindi otteniamo le n relazioni mancanti necessarie a rendere determinato il problema di base della dinamica di un sistema vincolato.

Dopo aver considerato i seguenti esempi di vincoli ideali, sarà chiaro quanto la classe dei vincoli, che abbiamo isolato, è importante e naturale in pratica.

Esempio 1. Una particella è vincolata a muoversi su una *superficie liscia stazionaria* (fig. 4).

In questo caso, ogni spostamento possibile dr, come ogni spostamento virtuale δr, giace sul piano tangente alla superficie nel punto P, e la reazione della superficie liscia ha direzione normale alla superficie in questo punto. Per tale ragione, abbiamo sempre

$$R\,dr = 0 \quad \text{o} \quad R\,\delta r = 0.$$

Esempio 2. Una particella è vincolata a muoversi su una *superficie liscia mobile ossia deformabile* (fig. 5).

In questo caso, la velocità possibile della particella e, quindi, lo spostamento infinitesimo $dr = v\,dt$ non giace sul piano tangente (vedi esempio 2 a pag. 14). Lo spostamento virtuale δr, che è uno spostamento infinitesimo

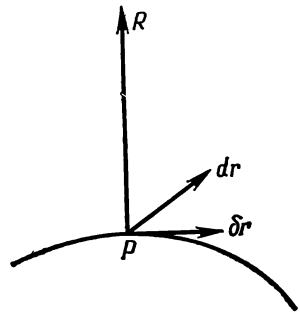


Fig. 5

possibile per la superficie « fermata » o « congelata », giace sul piano tangente. Poiché la reazione, nel caso di una superficie liscia mobile ossia deformabile ha direzione normale alla superficie, segue che $R\,\delta r = 0$ (mentre $R\,dr \neq 0$).

Dunque, *una superficie liscia, sia fissa che mobile ossia deformabile, costituisce un vincolo ideale.*

L'esempio 2 spiega chiaramente perché, quando siano determinati i vincoli ideali non stazionari, è necessario uguagliare a zero il lavoro delle forze di reazione per arbitrari spostamenti virtuali e non per spostamenti possibili.

Negli esempi che seguono incontreremo solo vincoli stazionari [1].

Esempio 3. Due particelle *sono collegate da un'asta di lunghezza fissa e di massa trascurabile* (fig. 6).

R_1 e R_2 sono le forze di reazione dei vincoli sulle particelle P_1 e P_2. Quindi per la terza legge di Newton, sull'asta agiscono le forze $N_1 = -R_1$ e $N_2 = -R_2$. Dette m e w, rispettivamente, la massa dell'asta e l'accelerazione del suo centro d'inerzia, I ed ε il momento centrale d'inerzia e l'accelerazione angolare, avremo

$$mw = N_1 + N_2, \qquad I\varepsilon = L,$$

[1] Dalla definizione di vincolo ideale segue che un vincolo non stazionario è ideale se tutte le sue configurazioni in differenti istanti (viste come vincoli stazionari) sono ideali.

dove L è il momento totale delle forze N_1 e N_2 applicate al centro d'inerzia. Ma è dato $m=0$ e $I=0$. Quindi $N_1+N_2=0$ e $L=0$ [1]. Da queste equazioni segue che le forze N_1 e N_2 e, conseguentemente, R_1 e R_2 hanno verso opposto, cioè sono dirette lungo l'asta.

Inoltre,

$$R_1\,\delta r_1+R_2\,\delta r_2=R_1\,dr_1+R_2\,dr_2=R_2\,(dr_2-dr_1)=R_2 d\,(r_2-r_1).$$

Posto $R_2=c\,(r_2-r_1)$ si ha

$$R_1\,\delta r_1+R_2\,\delta r_2=c\,(r_2-r_1)\,d\,(r_2-r_1)=\frac{c}{2}\,d\,(r_2-r_1)^2=0,$$

poiché $(r_2-r_1)^2=\text{cost}$.

Si può ritenere che un corpo assolutamente rigido sia un sistema di particelle in cui sia applicato un vincolo del tipo sopra considerato su ogni coppia di particelle. Per questa ragione, un corpo rigido può essere studiato

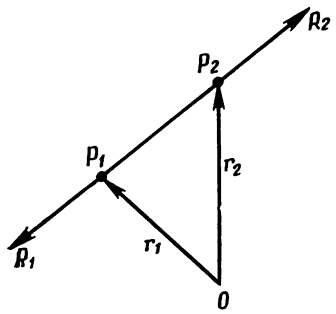


Fig. 6

come un sistema di particelle soggette a vincoli ideali. In assenza di altri vincoli (oltre a quelli che uniscono rigidamente le particelle del corpo) un corpo rigido è detto *libero*.

Esempio 4. Due corpi rigidi *sono connessi da una cerniera nel punto A* (fig. 7). Trascurando la massa e le dimensioni della cerniera, si può asserire (come nel precedente esempio) che $R_1+R_2=0$. Quindi,

$$R_1\,\delta r+R_2\,\delta r=(R_1+R_2)\,\delta r=0.$$

Esempio 5. Due corpi rigidi in moto *hanno le loro superfici in contatto idealmente lisce.* (Trascuriamo l'attrito!) (fig. 8). Anche in questo caso abbiamo $R_1+R_2=0$. In questo caso, R_1 e R_2 sono dirette lungo la normale comune alle due superfici. Quindi, la velocità relativa di questi corpi nel punto di contatto è v_2-v_1, e quindi la differenza tra gli spostamenti possibili $dr_2-dr_1=(v_2-v_1)\,dt$ giace sul comune piano tangente. Dunque,

$$R_1\,\delta r_1+R_2\,\delta r_2=R_1\,dr_1+R_2\,dr_2=R_2\,(dr_2-dr_1)=0.$$

Esempio 6. Due corpi rigidi si muovono *con le loro superfici idealmente ruvide (dentate) in contatto.* In questo caso la velocità relativa di slittamento è $v_2-v_1=0$. In conseguenza si ha anche $dr_2-dr_1=(v_2-v_1)\,dt=0$;

[1] Se il moto dell'asta non è pianoparallelo, l'equazione scalare $I\varepsilon=L$ è sostituita dall'equazione vettoriale $\frac{d}{dt}(\hat{I}\omega)=L$, dove $\hat{I}$ è il tensore d'inerzia e ω è la velocità angolare; per $\hat{I}=0$ segue nuovamente $L=0$.

dunque, anche in questo caso

$$R_1\,\delta r_1 + R_2\,\delta r_2 = R_2\,(dr_2 - dr_1) = 0.$$

Un meccanismo complesso può essere considerato come un sistema di corpi rigidi connessi a coppie rigidamente o a cerniera, o tali che le loro superfici siano in contatto. Se consideriamo

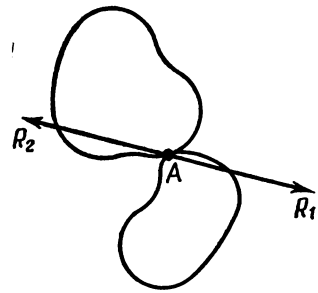


Fig. 7

tutte le congiunzioni rigide come assolutamente rigide, tutte le cerniere come ideali e tutti i piani di contatto idealmente lisci o idealmente ruvidi, allora *qualunque meccanismo complesso può*

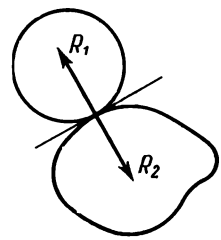


Fig. 8

essere interpretato come un sistema di particelle soggette a vincoli ideali.

Si noti che in molti casi questa idealizzazione non potrà essere possibile. Per esempio, non considerare le forze d'attrito può, in certe occasioni, distorcere il quadro fisico di un fenomeno. In questo caso, la condizione di vincoli ideali dovrà essere rifiutata e dovranno essere prese altre condizioni dovute alla natura dei vincoli e delle leggi d'attrito.

Si può però procedere altrimenti. Si possono considerare i vincoli ideali anche in questo caso tenendo conto solo delle componenti normali delle reazioni delle superfici ruvide e considerando le forze di attrito come forze effettive sconosciute. L'apparizione di nuove quantità incognite è compensata da relazioni supplementari che si ottengono dalle leggi di attrito sperimentali.

In questa interpretazione, il concetto di vincoli ideali diviene quasi universalmente applicabile.

D'ora in poi si assumerà che tutti i vincoli imposti al sistema siano ideali.

§ 3. *Equazione generale della dinamica. Equazioni di Lagrange del primo tipo*

Le seguenti equazioni sono applicate alle particelle di un sistema vincolato:

$$m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{R}_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, N), \tag{1}$$

dove m_ν è la massa della ν-esima particella, $\boldsymbol{w}_\nu$ è la sua accelerazione, e $\boldsymbol{F}_\nu$ e $\boldsymbol{R}_\nu$ sono, rispettivamente, la risultante delle forze effettive e la risultante delle forze di reazione operanti su questa particella ($\nu = 1, \ldots, N$). Poiché i vincoli sono ideali, per ogni posizione del sistema sottoposto a qualunque spostamento virtuale si ha

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{R}_\nu \, \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{2}$$

Sostituendo al posto delle forze di reazione $\boldsymbol{R}_\nu$ le loro espressioni ricavate dalle equazioni (1) e moltiplicando entrambi i membri dell'equazione risultante per -1, otteniamo

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu) \, \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{3}$$

Questa equazione è conosciuta come l'*equazione generale della dinamica*. Essa stabilisce che, dato un sistema in movimento, in ogni istante di tempo *la somma dei lavori delle forze effettive e delle forze d'inerzia per ogni spostamento virtuale è nulla.*

Allora, l'equazione generale della dinamica è sempre valida per ogni moto che è compatibile con i vincoli e che corrisponde alle specificate forze effettive $\boldsymbol{F}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, N$).

Viceversa, può essere dato un certo moto di un sistema, che è compatibile con i vincoli, che verifica l'equazione generale della dinamica (3). Quindi assumendo

$$\boldsymbol{R}_\nu = m_\nu \boldsymbol{w}_\nu - \boldsymbol{F}_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, N)$$

otteniamo le equazioni (1) e (2). Dunque, in ogni istante di tempo è possibile scegliere le forze di reazione $\boldsymbol{R}_\nu$ tali che, in virtù della (2), siano compatibili con i vincoli dati e per le quali siano valide le equazioni (1) ottenute dalla seconda legge di Newton. Ammettiamo che queste forze di reazione $\boldsymbol{R}_\nu$ siano attualmente realizzate (« l'ipotesi di realizzazione di forze di reazione ammissibili ») e che, in conseguenza, il moto considerato corrisponda

alle forze effettive $\boldsymbol{F}_\nu\,(t,\ \boldsymbol{r}_\mu,\ \boldsymbol{v}_\mu)$ $(\nu = 1,\ \ldots,\ N)$ date. Quindi, *l'equazione generale della dinamica esprime una condizione necessaria e sufficiente affinché il moto compatibile con vincoli corrisponda ad un dato sistema di forze effettive* $\boldsymbol{F}_\nu$ $(\nu = 1,\ \ldots,\ N)$ [1].

Possiamo trovare delle espressioni delle forze di reazione $\boldsymbol{R}_\nu$ per mezzo dei cosiddetti moltiplicatori indeterminati di Lagrange. Scriviamo le relazioni che definiscono gli spostamenti virtuali delle particelle di un sistema (vedi § 2):

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu}\,\delta\boldsymbol{r}_\nu = 0 \quad (\alpha = 1,\ \ldots,\ d), \tag{4}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{l}_{\beta\nu}\,\delta\boldsymbol{r}_\nu = 0 \quad (\beta = 1,\ \ldots,\ g). \tag{5}$$

Moltiplicando le equazioni (4) e (5) termine a termine per le grandezze scalari arbitrarie $-\lambda_\alpha$ e $-\mu_\beta$ e sommando le equazioni così ottenute all'equazione (2) termine a termine, otteniamo

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left(\boldsymbol{R}_\nu - \sum_{\alpha=1}^{d} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} - \sum_{\beta=1}^{g} \mu_\beta \boldsymbol{l}_{\beta\nu}\right) \delta\boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{6}$$

Questa relazione può essere scritta in forma esplicita

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left(R_{\nu x} - \sum_{\alpha=1}^{d} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu} - \sum_{\beta=1}^{g} \mu_\beta A_{\beta\nu}\right) \delta x_\nu + \\ + \{y\}_\nu\,\delta y_\nu + \{z\}_\nu\,\delta z_\nu = 0. \tag{6'}$$

Qui usiamo $\{y\}_\nu$ e $\{z\}_\nu$ per denotare in forma abbreviata le espressioni che differiscono dal coefficiente di δx_ν dato nella formula (6') sostituendo, rispettivamente, le lettere x, A con y, B o z e C.

Le relazioni (7') del § 2 permettono di esprimere $d + g$ incrementi diversi dai $3N$ incrementi virtuali δx_ν, δy_ν, δz_ν in funzione dei rimanenti $n = 3N - d - g$ incrementi. In questo caso il determinante J, costituito dai coefficienti degli incrementi « dipendenti » nelle equazioni (7') del § 2, è diverso da zero.

Scegliamo $d + g$ moltiplicatori denominati con λ_α e μ_β in modo tale che nelle equazioni (6') i coefficienti dei $d + g$ incrementi « dipendenti » svaniscano. Si può fare ciò, ed in modo univoco, poiché il determinante J dei coefficienti delle quantità λ_α, μ_β che sono state determinate non è uguale a zero. Allora ciò che rimane nella (6') sono solo i termini contenenti gli incrementi indipendenti δx_ν, δy_ν, δz_ν. Ma allora anche i coefficienti di questi incrementi indipendenti devono essere uguali a zero.

[1] Qui, si tenga presente che l'equazione generale della dinamica (3) non è in realtà una sola equazione, bensì un insieme di equazioni, poiché gli spostamenti virtuali arbitrari possono essere sostituiti nell'equazione (3) al posto di $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ $(\nu = 1,\ \ldots,\ N)$ in ogni istante t.

In altre parole, i moltiplicatori indeterminati λ_α e μ_β possono essere scelti in modo che tutti i coefficienti scalari nella (6'), e quindi tutti i coefficienti vettoriali nella (6), si annullino. Ma allora

$$\boldsymbol{R}_\nu = \sum_{\alpha=1}^{d} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} + \sum_{\beta=1}^{g} \mu_\beta \boldsymbol{l}_{\beta\nu} \quad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{7}$$

Abbiamo ottenuto un'espressione generale per le forze di reazione dei vincoli ideali in funzione dei moltiplicatori indeterminati di Lagrange λ_α, μ_β ($\alpha = 1, \ldots, d$; $\beta = 1, \ldots, g$).

Mettendo le espressioni (7) per $\boldsymbol{R}_\nu$ nell'equazione (1) otteniamo le cosiddette *equazioni di Lagrange del primo tipo* [1]

$$m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu + \sum_{\alpha=1}^{d} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} + \sum_{\beta=1}^{g} \mu_\beta \boldsymbol{l}_{\beta\nu} \quad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{8}$$

A queste equazioni bisognerebbe aggiungere le equazioni di vincolo

$$f_\alpha(\boldsymbol{r}_\nu) = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{l}_{\beta\nu} \dot{\boldsymbol{r}}_\nu + D_\beta = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, d;\ \beta = 1, \ldots, g). \tag{9}$$

Sostituendo ad ogni equazione vettoriale tre equazioni scalari, possiamo considerare che le equazioni (8) e (9) costituiscono un insieme di $3N + d + g$ equazioni scalari in $3N + d + g$ incognite scalari x_ν, y_ν, z_ν, λ_α, μ_β. Integrandole otteniamo le equazioni finali del moto e, nello stesso tempo, dalle equazioni (7) otteniamo il valore delle forze di reazione dei vincoli. Comunque, l'integrazione di tale insieme (sistema) di equazioni è normalmente molto complicata a causa del grande numero di equazioni. Questo è il motivo per cui le equazioni di Lagrange del primo tipo trovano attualmente un uso limitato. Nei §§ 6 e 10 deriveremo le equazioni di Lagrange del secondo tipo per un sistema olonomo e le equazioni di Appell per un sistema non olonomo. In queste equazioni il numero di grandezze scalari incognite (e quindi, il numero di equazioni) è $3N - d$, cioè $2d + g$ unità in meno che nel sistema di equazioni (8) e (9).

Esempio. Due particelle M_1 e M_2 di identica massa $m = 1$ sono unite da un filo di lunghezza fissa l e di massa trascurabile. Il sistema è vincolato a muoversi in un piano verticale, in modo che la velocità del punto medio del filo sia diretta lungo di esso. Determinare il moto di M_1 ed M_2.

---

[1] Queste equazioni furono ricavate dal matematico J.L. Lagrange nel suo celebre trattato *Mécanique analytique* (1788), in cui furono presentati per la prima volta i fondamenti della meccanica analitica.

Siano x_1, y_1 ed x_2, y_2 le coordinate delle particelle M_1 ed M_2. Scriviamo le equazioni di vincolo

$$\begin{cases} \frac{1}{2}[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-l^2]=0, \\ (x_2-x_1)(\dot{y}_2+\dot{y}_1)-(\dot{x}_2+\dot{x}_1)(y_2-y_1)=0. \end{cases} \tag{10}$$

Le equazioni di Lagrange con i moltiplicatori indeterminati λ e μ sono

$$\begin{cases} \ddot{x}_1=-\lambda(x_2-x_1)-\mu(y_2-y_1), \\ \ddot{y}_1=-g-\lambda(y_2-y_1)+\mu(x_2-x_1) \end{cases} \tag{11}$$

e

$$\begin{cases} \ddot{x}_2=\lambda(x_2-x_1)-\mu(y_2-y_1), \\ \ddot{y}_2=-g+\lambda(y_2-y_1)+\mu(x_2-x_1). \end{cases} \tag{12}$$

Determiniamo λ e μ dalle equazioni (11) tenendo conto della prima equazione delle (10):

$$\begin{cases} \lambda=-\frac{g}{l^2}(y_2-y_1)-\frac{1}{l^2}[(x_2-x_1)\ddot{x}_1+(y_2-y_1)\ddot{y}_1], \\ \mu=\frac{g}{l^2}(x_2-x_1)-\frac{1}{l^2}[(y_2-y_1)\ddot{x}_1-(x_2-x_1)\ddot{y}_1]. \end{cases} \tag{13}$$

Osserviamo che le equazioni (12) si ottengono dalle (11) se in queste ultime sostituiamo λ con $-\lambda$ e $\ddot{x}_1$, $\ddot{y}_1$ con $\ddot{x}_2$, $\ddot{y}_2$. Così determinando λ e μ dalle equazioni (12), troviamo

$$\begin{cases} \lambda=\frac{g}{l^2}(y_2-y_1)+\frac{1}{l^2}[(x_2-x_1)\ddot{x}_2+(y_2-y_1)\ddot{y}_2], \\ \mu=\frac{g}{l^2}(x_2-x_1)-\frac{1}{l^2}[(y_2-y_1)\ddot{x}_2-(x_2-x_1)\ddot{y}_2]. \end{cases} \tag{14}$$

Uguagliando le formule (13) e (14) contenenti le espressioni di μ e λ, otteniamo dopo semplici calcoli

$$\begin{cases} (\ddot{x}_2-\ddot{x}_1)(y_2-y_1)-(\ddot{y}_2-\ddot{y}_1)(x_2-x_1)=0, \\ (\ddot{x}_2+\ddot{x}_1)(x_2-x_1)+(\ddot{y}_2+\ddot{y}_1)(y_2-y_1)+2g(y_2-y_1)=0. \end{cases} \tag{15}$$

Introduciamo le seguenti notazioni abbreviate:

$$u=x_2-x_1, \quad v=y_2-y_1, \quad P=\dot{x}_1+\dot{x}_2, \quad Q=\dot{y}_1+\dot{y}_2. \tag{16}$$

Dunque, le equazioni (10) e (15) saranno riscritte come segue:

$$\begin{cases} u^2+v^2=l^2, \\ \ddot{u}v-\ddot{v}u=0, \end{cases} \tag{17}$$

$$Pv-Qu=0, \tag{18}$$

$$\dot{P}u+\dot{Q}v+2gv=0. \tag{19}$$

Le equazioni (17) mostrano che in un piano (u, v) una particella avente coordinate u, v si muove lungo una circonferenza di raggio l e centro nell'origine; la sua accelerazione è per tutto il tempo diretta verso il centro. Il moto di questa particella sarà allora uniforme. Per questa ragione,

$$u=l\cos\varphi, \quad v=l\operatorname{sen}\varphi, \quad \dot{\varphi}=\alpha=\text{cost}, \quad \varphi=\alpha t+\beta. \tag{20}$$

Secondo la (18) possiamo mettere

$$P=\frac{f}{l}u, \qquad Q=\frac{f}{l}v. \tag{21}$$

Sostituendo queste espressioni nella (19) e prendendo in considerazione le (17) e le (20), troviamo

$$\dot{f}+\frac{2g}{l}v=0, \qquad \text{cioè,} \qquad \dot{f}=-2g\,\operatorname{sen}\varphi.$$

Allora

$$\frac{df}{d\varphi}=\frac{1}{\alpha}\dot{f}=-\frac{2g}{\alpha}\operatorname{sen}\varphi \qquad \text{e} \qquad f=\frac{2g}{\alpha}\cos\varphi+2\gamma.$$

Conseguentemente mediante le (20) e le (21) abbiamo

$$P=2\left(\gamma+\frac{g}{\alpha}\cos\varphi\right)\cos\varphi, \qquad Q=2\left(\gamma+\frac{g}{\alpha}\cos\varphi\right)\operatorname{sen}\varphi. \tag{22}$$

Integrando troviamo

$$\begin{cases} x_1+x_2=\int P\,dt=\dfrac{1}{\alpha}\int P\,d\varphi= \\ \qquad =\dfrac{2\gamma}{\alpha}\operatorname{sen}\varphi+\dfrac{g}{\alpha^2}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi+\dfrac{g}{\alpha^2}\varphi+2\delta, \\ y_1+y_2=-\dfrac{2\gamma}{\alpha}\cos\varphi-\dfrac{g}{\alpha^2}\cos^2\varphi+2\varepsilon. \end{cases} \tag{23}$$

Dalle equazioni (16), (20) e (23) otteniamo finalmente

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{\gamma}{\alpha}\operatorname{sen}\varphi+\dfrac{g}{2\alpha^2}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi+\dfrac{g}{2\alpha^2}\varphi-\dfrac{l}{2}\cos\varphi+\delta, \\ y_1=-\dfrac{\gamma}{\alpha}\cos\varphi-\dfrac{g}{2\alpha^2}\cos^2\varphi-\dfrac{l}{2}\operatorname{sen}\varphi+\varepsilon, \\ x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}\operatorname{sen}\varphi+\dfrac{g}{2\alpha^2}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi+\dfrac{g}{2\alpha^2}\varphi+\dfrac{l}{2}\cos\varphi+\delta, \\ y_2=-\dfrac{\gamma}{\alpha}\cos\varphi-\dfrac{g}{2\alpha^2}\cos^2\varphi+\dfrac{l}{2}\operatorname{sen}\varphi+\varepsilon, \\ \varphi=\alpha t+\beta \end{cases} \tag{24}$$

(dove α, β, γ, δ ed ε sono costanti arbitrarie).

§ 4. *Principio degli spostamenti virtuali. Principio di D'Alembert*

La *posizione d'equilibrio* è quella posizione in cui un sistema rimarrebbe per sempre se le velocità di tutte le particelle fossero nulle.

La posizione di un sistema $\boldsymbol{r}_\nu^0$ ($\nu = 1, \ldots, N$) sarà una posizione di equilibrio se e solo se il « moto » $\boldsymbol{r}_\nu(t) \equiv \boldsymbol{r}_\nu^0$ ($\nu = 1, \ldots, N$) soddisfa le equazioni generali della dinamica, cioè quando vale in questa posizione del sistema

$$\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{F}_\nu\,\delta\boldsymbol{r}_\nu=0. \tag{1}$$

L'equazione (1) esprime il *principio degli spostamenti virtuali.*

Affinché una posizione (compatibile con i vincoli) di un sistema sia una posizione di equilibrio, è necessario e sufficiente che in tale posizione la somma dei lavori delle forze effettive per ogni spostamento virtuale del sistema sia uguale a zero.

Ordinariamente, il principio degli spostamenti virtuali è applicato a vincoli stazionari. Se i vincoli sono stazionari, allora il termine « compatibile con i vincoli» significa che la posizione del sistema soddisfa vincoli finiti. Dal momento che vincoli differenziali sono lineari ed omogenei rispetto alle velocità, essi sono automaticamente soddisfatti quando assumiamo $v_\nu = 0$ ($\nu = 1, \ldots, N$).

Se i vincoli non sono stazionari, allora il termine « compatibile con i vincoli » significa che essi sono soddisfatti *per ogni t* se poniamo $r_\nu = r_\nu^0$ e $v_\nu = 0$ ($\nu = 1, \ldots, N$). Notiamo che in questo caso gli spostamenti virtuali δr_ν ($\nu = 1, \ldots, N$) possono essere differenti per differenti t.

Nel caso generale le forze F_ν dipendono da t, r_μ, v_μ ($\mu = 1, \ldots, N$), cioè $F_\nu = F_\nu(t, r_\mu, v_\mu)$ ($\nu = 1, \ldots, N$). Si assume allora che l'equazione (1) sia valida per ogni valore di t se nell'espressione di F_ν poniamo tutti gli $r_\mu = r_\mu^0$ e tutte le $v_\mu = 0$.

Nei casi particolari più elementari, il principio degli spostamenti virtuali (o, come a volte è chiamato, quando è applicato ai sistemi scleronomi, il principio degli spostamenti possibili) al tempo di Galileo era conosciuto sotto il nome di «regola d'oro della meccanica » [1].

Siano le forze F_1 ed F_2 agenti agli estremi di una leva senza peso in stato di equilibrio. Allora, denotando con F_1' ed F_2' le componenti tangenziali (alle traiettorie possibili) di queste forze, e con δl_1 e δl_2 le grandezze degli spostamenti elementari possibili corrispondenti, avremo, per mezzo dell'equazione (1), a meno del segno

$$F_1' \delta l_1 = F_2' \delta l_2,$$

cioè

$$\frac{\delta l_1}{\delta l_2} = \frac{F_2'}{F_1'}$$

(*un aumento in forza è compensato da una perdita in spostamento e viceversa* — « la regola d'oro della meccanica »).

Il principio degli spostamenti virtuali è il principio più generale della statica analitica. È possibile ottenere da questo le condizioni di equilibrio per ogni dato sistema meccanico.

[1] Galileo attribuì la prova della « regola d'oro della meccanica » ad Aristotele. Nella sua forma generale, il principio degli spostamenti virtuali fu espresso da Bernoulli nel 1717 per la prima volta.

Esempio 1. Deriviamo dall'equazione (1) le condizioni di equilibrio di un corpo libero e rigido, che nei corsi di meccanica sono ordinariamente ottenute mediante ragionamenti di statica geometrica. Denotando con $\boldsymbol{v}_O$ la velocità di una particella del corpo rigido, con $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare del corpo, con $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{L}_O$ il vettore principale ed il momento principale rispetto al polo O per il sistema delle forze esterne che operano sul corpo rigido, uguagliamo a zero l'espressione del lavoro elementare delle forze applicate al corpo rigido in uno spostamento infinitesimale arbitrario del corpo [1]:

$$\delta A = (\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{L}_O\boldsymbol{\omega})\, dt = 0. \tag{2}$$

Poiché i vettori $\boldsymbol{v}_O$ ed $\boldsymbol{\omega}$ sono arbitrari, l'equazione (2) continua a valere quando e solo quando

$$\boldsymbol{F} = 0, \quad \boldsymbol{L}_O = 0. \tag{3}$$

Queste equazioni sono *le condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio di un corpo libero.*

In modo simile otteniamo le condizioni di equilibrio di un corpo rigido vincolato. Per esempio, sia O un punto fissato. Allora $\boldsymbol{v}_O = 0$ e l'equazione (2) ha la forma $\delta A = \boldsymbol{L}_O\boldsymbol{\omega}\, dt = 0$, da cui, per l'arbitrarietà del vettore $\boldsymbol{\omega}$, otteniamo la condizione di equilibrio desiderata, $\boldsymbol{L}_O = 0$.

Se il corpo può solo ruotare intorno all'asse fissato u (con vettore di base $\boldsymbol{e}$), le equazioni (2) assumono la forma $\delta A = \boldsymbol{L}_O\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{e}\, dt = 0$, da cui, per la natura arbitraria di ω, segue la condizione di equilibrio $L_u = 0$; qui $L_u = \boldsymbol{L}_O\boldsymbol{e}$ è il momento principale delle forze esterne rispetto all'asse u.

Esempio 2. Deriviamo le condizioni di equilibrio di un *sistema arbitrario vincolato di corpi rigidi sottoposti all'azione della forza di gravità.* Denotiamo con M la somma delle masse di tutti i corpi e con z_c la coordinata verticale del baricentro del sistema dei corpi (prendiamo l'asse z diretto verticalmente verso il basso). Allora secondo l'equazione (1) otteniamo

$$\delta A = Mg\, \delta z_c = 0$$

e, conseguentemente, le condizioni di equilibrio del sistema hanno l'aspetto

$$\delta z_c = 0. \tag{4}$$

Così, le posizioni di equilibrio di un sistema di corpi pesanti sono quelle in cui il centro di gravità occupa la minima, la massima od ogni altra posizione « stazionaria » sulla verticale (principio di Torricelli).

Esempio 3. Trovare la *forma di equilibrio di una catena pesante omogenea attaccata a due punti.* Considerando questa catena come un sistema di corpi rigidi (anelli) è possibile scrivere la relazione (4). Ma (vedi fig. 9, dove Oxz

[1] L'equazione $\delta A = (\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{L}_O\boldsymbol{\omega})dt$ può essere ottenuta nel seguente modo. Denotiamo con $\boldsymbol{F}_i$ le forze agenti sulle particelle del corpo rigido, con $\boldsymbol{r}_i$ e $\boldsymbol{v}_i$ i vettori radiali (tracciati a partire dal punto O del corpo) e le velocità dei punti di applicazione delle forze $\boldsymbol{F}_i$ ($i = 1, 2, \ldots$), rispettivamente. Allora, usando il segno $\times$ per indicare la moltiplicazione vettoriale, troviamo

$$\delta A = \sum_i \boldsymbol{F}_i\, \delta\boldsymbol{r}_i = \sum_i \boldsymbol{F}_i\boldsymbol{v}_i\, dt = \sum_i \boldsymbol{F}_i\, (\boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)\, dt =$$

$$= \left[\left(\sum_i \boldsymbol{F}_i\right)\boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega}\sum_i \boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i\right] dt$$

la sostituzione di $\delta\boldsymbol{r}_i$ con $d\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{v}_i\, dt$ è legittima per il fatto che il corpo rigido è un sistema scleronomo (vedi pag. 11). Mediante la terza legge di Newton, il vettore principale ed il momento principale delle forze interne del corpo rigido sono uguali a zero. Per questa ragione $\sum_i \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}$ e $\sum_i \boldsymbol{r}_i \times \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{L}_O$.

è il piano verticale e z è la verticale)

$$z_c = \frac{\int z\, ds}{\int ds}$$

e poiché la lunghezza di una catena omogenea non cambia durante gli spostamenti, la condizione (4) prende la forma

$$\delta \int z\, ds = 0. \tag{5}$$

Questa relazione può anche essere scritta come

$$\delta \int_{z_1}^{z_2} z \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}\, dz = 0. \tag{5'}$$

Come si è stabilito nel calcolo delle variazioni, nella classe di curve

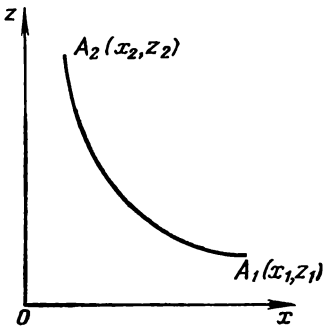


Fig. 9

$x = f(z)$ passanti per due specifici punti, la curva che deriva dall'integrale

$$\int_{z_1}^{z_2} F\left(z,\ x,\ \frac{dx}{dz}\right) dz$$

in valore estremo (più precisamente stazionario), per il quale

$$\delta \int_{z_1}^{z_2} F\, dz = 0,$$

deve soddisfare l'equazione differenziale [1]

$$\frac{d}{dz}\frac{\partial F}{\partial x'} - \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \qquad \left(x' = \frac{dx}{dz}\right). \tag{6}$$

[1] Questa equazione la ottenne Eulero; vedi pag. 91 e l'osservazione di pag. 92.

Nel nostro caso $F=z\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}$. Quindi, l'equazione (6) assume la forma

$$\frac{d}{dz}\left[z\frac{\frac{dx}{dz}}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}}\right]=0. \tag{7}$$

Da ciò abbiamo che

$$z\frac{\frac{dx}{dz}}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}}=c$$

e

$$\frac{dx}{dz}=\frac{c}{\sqrt{z^2-c^2}}, \tag{8}$$

dove c è una costante arbitraria. Integrando otteniamo l'equazione di una catenaria

$$z=\frac{c}{2}\left[e^{(x-\alpha)/c}+e^{-(x-\alpha)/c}\right]=c\,\mathrm{ch}\,\frac{x-\alpha}{c}, \tag{9}$$

dove i valori delle costanti arbitrarie c ed α sono determinati fissando le condizioni iniziali. Quindi, *la forma di equilibrio di una catena omogenea e pesante è una catenaria* [1].

Esempio 4. *Una figura piana rigida può scivolare su due suoi punti A e B lungo curve stazionarie che giacciono sul medesimo piano.* Vogliamo calcolare

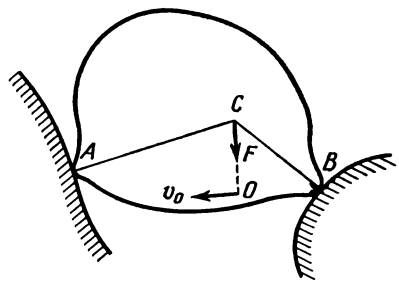


Fig. 10

sotto l'azione di quale forza $\boldsymbol{F}$ la figura può rimanere in equilibrio (fig. 10).

Oltre alla forza effettiva $\boldsymbol{F}$, la figura è sottoposta ad altre due forze di reazione dirette lungo le normali alle curve, e le linee di reazione di queste tre forze devono intersecarsi in un solo punto. In altre parole, la linea d'azione della forza $\boldsymbol{F}$ deve passare per il punto di intersezione delle normali alle curve nei punti A e B, cioè *la linea di azione della forza* $\boldsymbol{F}$ *deve passare per il centro istantaneo C delle velocità possibili della figura* [2].

---

[1] Galileo pensò che la parabola fosse una tale forma di equilibrio. L'errore di Galileo fu corretto da Huygens.

[2] Qui, la grandezza e la direzione della forza $\boldsymbol{F}$ possono essere arbitrarie.

Possiamo arrivare a questa conclusione anche partendo dal principio degli spostamenti possibili. Infatti denotiamo con O un punto della linea di azione della forza $\boldsymbol{F}$. Allora dalla condizione $\delta A = \boldsymbol{F}\boldsymbol{v}_O\, dt = 0$ concludiamo che $\boldsymbol{v}_O \perp \boldsymbol{F}$, da ciò segue che il centro istantaneo delle possibili velocità della figura è localizzato sulla linea di azione della forza $\boldsymbol{F}$.

Esempio 5. Alcune *applicazioni geometriche*. Iniziamo con un'osservazione preliminare. Siano dati, in un piano, una certa curva C ed un punto P (la curva C può degenerare in un punto in qualche caso particolare). Tracciamo a partire da P la normale alla curva C e denotiamo con r la distanza lungo la normale dalla curva C al punto P. Cioè $r = P_0P$ (fig. 11). Applichiamo al punto P una certa forza $\boldsymbol{F}$ diretta lungo la normale P_0P e consideriamo $F > 0$ se la direzione della forza $\boldsymbol{F}$ coincide con la direzione da P_0 a P, altrimenti $F < 0$. Il lavoro elementare della forza $\boldsymbol{F}$ è uguale a $\delta A = \boldsymbol{F}(dr_0 + dr)$. Ma dr è composto da due spostamenti elementari: lo spostamento lungo la retta P_0P (il valore di questo spostamento è dr) e lo spostamento di P causato dalla rotazione della retta P_0P. Questo spostamento,

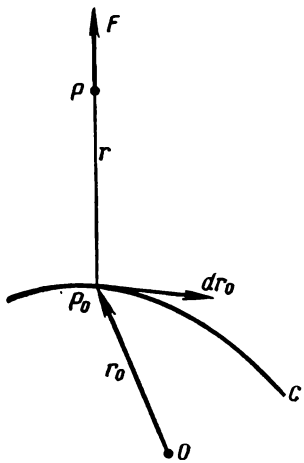


Fig. 11

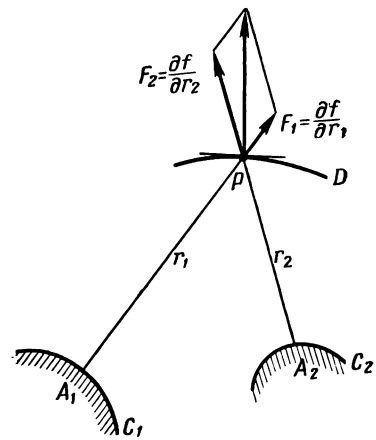


Fig. 12

come dr_0, è perpendicolare alla retta P_0P, cioè alla linea d'azione della forza $\boldsymbol{F}$. Dunque [1],

$$\delta A = F\, dr. \tag{10}$$

Ci possono essere n curve $C_1, C_2, \ldots, C_n$ e un punto P su uno stesso piano. Chiamiamo $r_1, r_2, \ldots, r_n$ le distanze (lungo le normali) da P a queste curve [2] (la fig. 12 corrisponde al caso di $n = 2$). Sullo stesso piano consideriamo la curva D data dall'equazione [3]

$$f(r_1, r_2, \ldots, r_n) = 0. \tag{11}$$

[1] Quando la curva C degenera in un punto, la formula (10) diventa un'espressione per il lavoro di una forza centrale.

[2] Alcune curve (o tutte) $C_1, C_2, \ldots, C_n$ possono degenerare in un punto.

[3] Ogni quantità $r_1, r_2, \ldots, r_n$ è una funzione di due coordinate cartesiane del punto P. Per questa ragione, l'equazione (11) è l'equazione di una certa curva su un piano.

Dimostriamo ora, usando l'equazione (11), come *costruire una normale alla curva D nel punto P.*

Per ogni spostamento infinitesimale di P lungo la curva D, otteniamo

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial r_i} dr_i = 0. \tag{12}$$

Ora si applicano al punto P le forze $F_i = \frac{\partial f}{\partial r_i}$ dirette lungo le normali r_i ($i = 1, \ldots, n$). Dunque, la (12) sarà scritta come

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \, dr_i = 0.$$

Ora questo, in accordo con l'osservazione preliminare, significa che la somma dei lavori delle forze $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ è nulla nel caso di uno spostamento

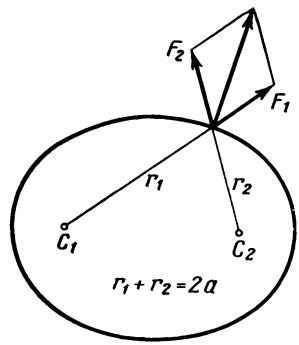


Fig. 13

arbitrario del punto P lungo la curva D. Ma allora ogni punto vincolato che si può muovere lungo la curva liscia D, sarà in equilibrio sotto l'azione delle forze $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$. Dunque, *la risultante delle forze* $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ *è diretta lungo la normale alla curva D.*

Così abbiamo un metodo molto semplice per costruire geometricamente una normale alla curva D data dall'equazione (11).

Possiamo considerare alcuni casi particolari:

a) D è un'ellisse. In questo caso, C_1 e C_2 sono punti (i fuochi dell'ellisse), l'equazione (11) è data da $r_1 + r_2 - 2a = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, e *la normale all'ellisse è la bisettrice dell'angolo compreso tra i raggi vettori focali* (fig. 13).

b) D è un'iperbole. L'equazione dell'iperbole è $r_1 - r_2 - 2a = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = -1$, e dalla costruzione (fig. 14) è facile vedere che *la tangente all'iperbole è la bisettrice dell'angolo fra i raggi vettori focali* (mentre la normale è la bisettrice dell'angolo adiacente).

c) D è una parabola (fig. 15), C_1 è una linea retta (la direttrice), C_2 è un punto (fuoco). L'equazione della parabola è $r_1 - r_2 = 0$. Come nel caso dell'iperbole, segue dalla costruzione che *la tangente alla parabola è la bisettrice dell'angolo fra il raggio vettore focale* r_1 *e la perpendicolare* r_2 *alla direttrice.*

Per il principio degli spostamenti virtuali, l'equazione (1) è un caso particolare dell'equazione generale della dinamica (vedi l'equazione (3) a pag. 21). Comunque l'equazione generale

della dinamica può essere vista come l'equazione che esprime il principio degli spostamenti virtuali e che caratterizza la posizione di equilibrio del sistema che risulta se alle forze effettive $\boldsymbol{F}_\nu$ si aggiungono le forze fittizie inerziali $-m_\nu \boldsymbol{w}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, N$). Siamo così arrivati al principio di D'Alembert.

Principio di D'Alembert. *Ogni posizione di un sistema in moto può essere rivista come posizione di equilibrio se alle forze effettive*

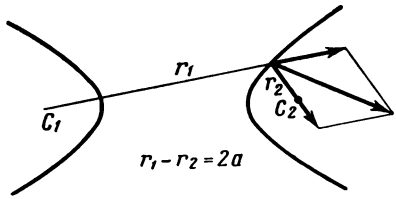


Fig. 14

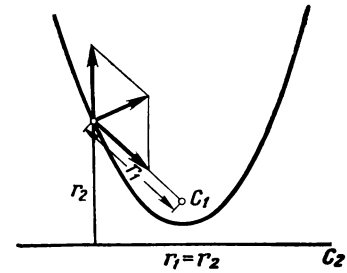


Fig. 15

agenti sul sistema in questa posizione aggiungiamo le forze fittizie d'inerzia.

Il principio di D'Alembert permette l'estensione delle tecniche e dei metodi di soluzione dei problemi di statica a dei problemi di dinamica. In particolare, permette di determinare le forze dinamiche di reazione con metodi statici. Infatti, in una posizione di equilibrio, le forze di reazione $\boldsymbol{R}_\nu$ differiscono da $\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu$ solo in direzione:

$$\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = -\boldsymbol{R}_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, N),$$

ma allora

$$m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{R}_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, N),$$

cioè le forze di reazione $\boldsymbol{R}_\nu$ determinate dal principio di D'Alembert sono le forze di reazione dinamiche richieste. E così si può aggiungere la seguente proposizione al principio di D'Alembert sopra formulato:

Quando si considerano le forze inerziali come forze effettive aggiunte, applicate ai punti di un sistema, si sostituisce il problema dinamico dato con un nuovo problema statico. Nel nuovo problema, le forze di reazione statiche coincidono con le forze di reazione cercate nel problema dinamico iniziale.

I seguenti esempi serviranno ad illustrare l'uso dei metodi statici nella soluzione dei problemi in dinamica.

Esempio 1. *Un carro di scorta a una locomotiva pieno d'acqua è in moto con un'accelerazione w. Si chiede di determinare la forma e la posizione della superficie d'acqua.*

In assenza di accelerazione la superficie d'acqua è orizzontale. Il piano dato è perpendicolare, in ogni punto, alla direzione della forza di gravità applicata all'acqua. Questa posizione statica è applicabile anche nel caso di moto accelerato del carro se ad ogni elemento di massa dm è applicata un'ulteriore forza fittizia d'inerzia $d\boldsymbol{J} = -dm\boldsymbol{w}$. La superficie d'acqua sarà un piano perpendicolare alla risultante delle due forze: la forza verti-

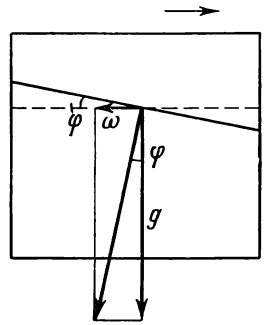


Fig. 16

cale di gravità $dm\boldsymbol{g}$ e la forza orizzontale d'inerzia $-dm\boldsymbol{w}$ (fig. 16). La superficie d'acqua sarà inclinata di un angolo φ rispetto alla direzione orizzontale, dove $\operatorname{tg}\varphi = \frac{w}{g}$.

Esempio 2. Scriviamo *l'equazione differenziale della rotazione di un corpo rigido intorno ad un asse fisso u* (fig. 17). Ad ogni elemento di massa dm

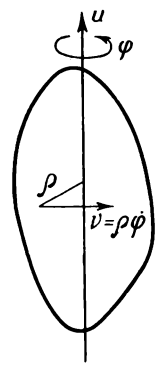


Fig. 17

applichiamo una forza inerziale fittizia $-dm\boldsymbol{w}$. Si calcoli il momento principale delle forze d'inerzia rispetto all'asse di rotazione

$$-\int dm\rho\ddot{\varphi}\rho = -\ddot{\varphi}\int \rho^2\, dm = -I_u\ddot{\varphi},$$

dove $I_u = \int \rho^2\, dm$ è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione u. Si denoti con L_u il momento principale delle forze esterne applicate al corpo rispetto all'asse u [1]. Allora, in accordo con il principio di D'Alembert, il corpo sarà in equilibrio sotto l'azione del momento totale $L_u - I_u\ddot{\varphi}$. Quindi (vedi pag. 27), questo momento totale deve essere nullo. Otteniamo dunque

$$I_u\ddot{\varphi} = L_u.$$

Esempio 3. *Un albero orizzontale omogeneo è in rotazione uniforme con velocità angolare* ω. *Un disco omogeneo è montato eccentricamente sull'albero perpendicolarmente al suo asse, ad ugual distanza dai cuscinetti. Si richiede di determinare la pressione sui cuscinetti durante la rotazione dell'albero.*

Consideriamo le forze inerziali $dm\omega^2 r$ che corrispondono ai singoli elementi di massa dm del disco (fig. 18). Sono le forze convergenti dirette

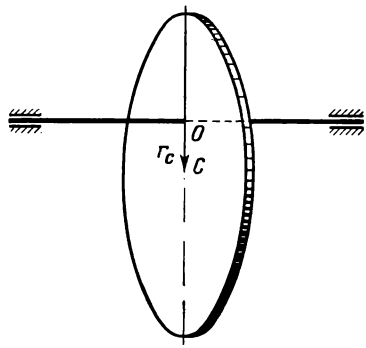


Fig. 18

dall'asse dell'albero. La risultante di queste forze è uguale a $\boldsymbol{J} = \omega^2 \int \boldsymbol{r}\, dm = M_1\omega^2 \boldsymbol{r}_C$, dove M_1 è la massa del disco, e $\boldsymbol{r}_C = \boldsymbol{OC}$ (O è il punto di intersezione del piano del disco con l'asse dell'albero, e C è il centro geometrico del disco). Si applichi il principio di D'Alembert e si determini la pressione statica sui cuscinetti, assumendo che tre forze siano applicate all'asse dell'albero [2]: 1) la forza di gravità dell'albero $M\boldsymbol{g}$; 2) la forza di gravità del disco $M_1\boldsymbol{g}$ e 3) la forza $\boldsymbol{J} = M_1\omega^2\boldsymbol{r}_C$.

La pressione $\boldsymbol{N}$ su ogni cuscinetto è determinata dalla formula

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{2}(M + M_1)\,\boldsymbol{g} + \frac{1}{2} M_1\omega^2 \boldsymbol{r}_C.$$

La forza $\boldsymbol{N}$ ha un valore massimo

$$N_{\max} = \frac{1}{2}(M + M_1)\, g + \frac{1}{2} M_1\omega^2 OC$$

in quella posizione del disco quando il centro geometrico C è posto sotto il punto O.

---

[1] Il momento principale delle forze interne è nullo.

[2] La risultante delle forze elementari d'inerzia, per un albero, è nulla ed è quindi ignorata.

§ 5. *Sistemi olonomi. Coordinate indipendenti. Forze generalizzate*

Sia dato un sistema olonomo di N particelle P_ν con i vettori radiali $\boldsymbol{r}_\nu = x_\nu \boldsymbol{i} + y_\nu \boldsymbol{j} + z_\nu \boldsymbol{k}$ [1] ($\nu = 1, \ldots, N$) soggetti ai vincoli finiti

$$f_\alpha(t, \boldsymbol{r}_\nu) = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, d) \tag{1}$$

o (nella notazione equivalente)

$$f_\alpha(t, x_\nu, y_\nu, z_\nu) = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, d). \tag{1'}$$

Assumeremo che le d funzioni f_α delle $3N$ variabili x_ν, y_ν, z_ν ($\nu = 1, \ldots, N$) siano indipendenti [2]; qui t è considerato un parametro. Possiamo dunque esprimere le d coordinate delle equazioni (1') come le funzioni delle $3N - d$ coordinate rimanenti e del tempo t, e studiare queste $3N - d$ coordinate come quantità indipendenti che definiscono la posizione del sistema al tempo t.

Ad ogni modo non è necessario considerare le coordinate cartesiane per tali coordinate indipendenti. Tutte le $3N$ coordinate cartesiane possono essere espresse in forma di funzione di $n = 3N - d$ parametri indipendenti $q_1, \ldots, q_n$ e di t:

$$\begin{cases} x_\nu = \varphi_\nu(t, q_1, \ldots, q_n), \quad y_\nu = \psi_\nu(t, q_1, \ldots, q_n), \\ z_\nu = \chi_\nu(t, q_1, \ldots, q_n) \quad (\nu = 1, \ldots, N). \end{cases} \tag{2}$$

Quando queste funzioni sono inserite nelle equazioni dei vincoli (1'), queste ultime divengono delle identità. Assumeremo inoltre che qualsiasi posizione del sistema, che sia compatibile con i vincoli ad un dato istante di tempo, possa essere ottenuta dalle equazioni (2) per certi valori delle quantità $q_1, \ldots, q_n$.

Le equazioni (2) sono equivalenti alle equazioni vettoriali

$$\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu(t, q_1, \ldots, q_n) \quad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{2'}$$

Le funzioni scalari (2) e, conseguentemente, le funzioni vettoriali (2') sono supposte continue e differenziabili.

Il numero minimo delle quantità q_i, con l'aiuto delle quali dalle formule (2) si possono ricavare tutte le posizioni possibili di un sistema olonomo, coincide con il numero dei gradi di libertà del sistema $n = 3N - d$ (vedi pag. 15).

Le quantità $q_1, \ldots, q_n$ nelle formule (2) o (2') (n è il numero dei gradi di libertà) sono dette *coordinate indipendenti generalizzate* del sistema.

---

[1] $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ sono i vettori di base degli assi x, y, z del sistema inerziale di coordinate.

[2] Altrimenti, se avessimo, per esempio, una relazione come

$$f_d = \Omega(f_1, \ldots, f_{d-1}, t),$$

uno dei vincoli (nel caso dato, $f_d = 0$) sarebbe opposto agli altri (per $\Omega(0, \ldots, 0, t) \not\equiv 0$) o sarebbe una conseguenza degli altri (per $\Omega(0, \ldots, 0, t) \equiv 0$).

Per ogni istante di tempo t è stabilita una corrispondenza biunivoca tra i possibili stati del sistema e i punti di una data regione dello spazio di coordinate ad n dimensioni $(q_1, \ldots, q_n)$. Ad ogni posizione del sistema al tempo t corrisponde un punto dello spazio $(q_1, \ldots, q_n)$ che descrive questa posizione del sistema. *Il moto di un punto nello spazio di coordinate* $(q_1, \ldots, q_n)$ *corrisponde al moto del sistema.*

Se tutti i vincoli sono stazionari (un sistema scleronomo), allora il tempo t non appare esplicitamente nell'equazione (1'). È allora sempre possibile scegliere le coordinate $q_1, \ldots, q_n$ tali che il tempo t non compaia esplicitamente in entrambe le equazioni (2). D'ora in poi si assume che per un sistema scleronomo le coordinate indipendenti $q_1, \ldots, q_n$ siano scelte nel modo suddetto. Quindi, per un sistema scleronomo, le formule (2) e (2') hanno la forma

$$x_\nu = \varphi_\nu(q_i), \quad y_\nu = \psi_\nu(q_i), \quad z_\nu = \chi_\nu(q_i) \quad (\nu = 1, \ldots, N) \tag{3}$$

oppure

$$r_\nu = r_\nu(q_i) \quad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{3'}$$

Esempio 1. *Un doppio pendolo* (fig. 19) in movimento su un piano ha due gradi di libertà. Dunque come coordinate indipendenti q_1 e q_2 possono essere scelti gli angoli φ e ψ.

Esempio 2. *Un corpo rigido libero* ha sei gradi di libertà. Come coordinate indipendenti possiamo prendere le tre coordinate x_A, y_A, z_A di un punto A qualsiasi del corpo e i tre angoli euleriani ψ, θ e φ che definiscono la rotazione di un sistema di assi $A\xi\eta\zeta$ (che è invariabilmente fissato al corpo) rispetto ad un sistema stazionario di coordinate di assi $Oxyz$.

Gli angoli di Eulero sono determinati come segue (fig. 20). Tracciamo per il punto A gli assi Ax_1, Ay_1, Az_1 paralleli agli assi Ox, Oy, Oz e nella stessa direzione. La retta AN che interseca i piani Ax_1y_1 ed $A\xi\eta$ è detta linea dei nodi [1]. Allora θ, « angolo di nutazione », è l'angolo fra l'asse Az_1 e l'asse $A\zeta$; ψ, « angolo di precessione », è l'angolo fra l'asse Ax_1 e la retta AN; φ è l'« angolo di pura rotazione » formato dagli assi AN ed $A\xi$.

Mediante tre spostamenti paralleli, lungo gli assi x, y, z, da x_A, y_A, z_A il triedro degli assi $Oxyz$ è spostato nella posizione $Ax_1y_1z_1$. Mediante tre successive rotazioni, di un angolo ψ intorno all'asse Az_1, di un angolo θ intorno all'asse AN e dell'angolo φ intorno all'asse $A\zeta$, il triedro $Ax_1y_1z_1$ si sposta nella posizione $A\xi\eta\zeta$.

Dunque, le quantità x_A, y_A, z_A, ψ, θ, φ determinano la posizione delle coordinate del triedro $A\xi\eta\zeta$ relative al triedro $Oxyz$, cioè determinano la posizione di un dato corpo rigido relativa al sistema di assi coordinati iniziali.

Si prenda un punto arbitrario di un corpo rigido. È determinato specificatamente dalle sue coordinate ξ, η, ζ. Quindi le coordinate x, y, z di questo punto possono essere rappresentate come funzioni delle quantità x_A, y_A, z_A, ψ, θ, φ. Allora, per esempio, dalla fig. 20 si può vedere immediatamente che

$$z = z_A + \xi \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta + \eta \cos \varphi \operatorname{sen} \theta + \zeta \cos \theta.$$

[1] L'asse AN sia diretto in modo tale che la rotazione attorno a questo asse dall'asse Az_1 all'asse $A\zeta$ avvenga attraverso l'angolo più piccolo in senso antiorario.

Similmente, sebbene in modo più complesso, espressioni analoghe si possono ottenere per x ed y [1]. Queste formule sono un caso particolare delle formule (2). Esse non contengono esplicitamente t. *Un corpo rigido libero è un sistema scleronomo.*

Si noti che nel moto di un corpo rigido le quantità x_A, y_A, z_A, ψ, θ, φ variano e la scomposizione in tre spostamenti paralleli e tre rotazioni, vista precedentemente, per passare da $Oxyz$ a $A\xi\eta\zeta$ dà la visione del moto arbitrario di un corpo rigido come un moto complesso (composto) che consiste

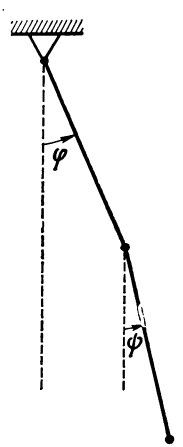


Fig. 19

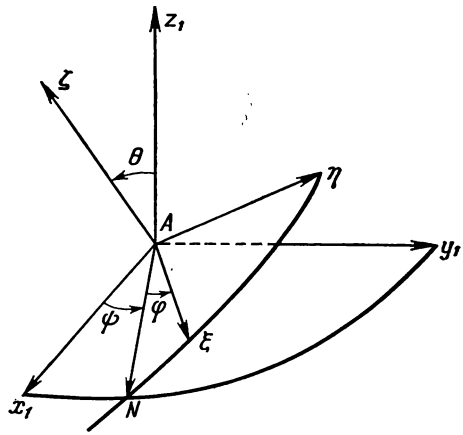


Fig. 20

di sei moti semplici: tre moti di traslazione (lungo gli assi x, y e z) e tre moti puramente rotazionali (attorno agli assi Az_1, AN ed $A\zeta$). Poiché in un moto complesso la velocità angolare è uguale alla somma vettoriale delle componenti angolari delle velocità, segue che

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\psi + \boldsymbol{\omega}_\theta + \boldsymbol{\omega}_\varphi, \tag{4}$$

dove $\boldsymbol{\omega}_\psi$, $\boldsymbol{\omega}_\theta$, $\boldsymbol{\omega}_\varphi$ sono dirette lungo gli assi Az_1, AN, $A\zeta$, rispettivamente, inoltre $\omega_\psi = \dot{\psi}$, $\omega_\theta = \dot{\theta}$ e $\omega_\varphi = \dot{\varphi}$.

Esempio 3. *Una particella libera M ha tre gradi di libertà.* Come coordinate indipendenti possiamo prendere le coordinate cartesiane o altre coordinate del punto. Nel caso quando sono usate le coordinate cilindriche r, ψ, z per q_1, q_2, q_3 le formule diventano (fig. 21)

$$x = r\cos\psi, \quad y = r\operatorname{sen}\psi, \quad z = z. \tag{5}$$

Nel caso di coordinate sferiche r, ψ, φ (fig. 22) abbiamo al posto delle (5)

$$x = r\cos\psi\operatorname{sen}\varphi, \quad y = r\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\varphi, \quad z = r\cos\varphi. \tag{6}$$

Esempio 4. *Una particella M vincolata è localizzata su una sfera mobile*

$$(x - at)^2 + (y - bt)^2 + (z - ct)^2 = r^2.$$

Allora $n = 2$, e la « longitudine » e la « latitudine » sulla sfera (fig. 23) possono essere utilizzate come coordinate indipendenti:

$$x = at + r\cos q_1\cos q_2, \quad y = bt + r\operatorname{sen} q_1\cos q_2, \quad z = ct + r\operatorname{sen} q_2.$$

[1] Vedi, per esempio, G.K. Suslov, *Meccanica teorica*, Mosca-Leningrado, 1944, pagg. 77 e 83 (ed. russa).

Ad ogni coordinata q_i corrisponde una *forza generalizzata* Q_i $(i = 1, \ldots, n)$. Le forze generalizzate sono determinate come segue. Consideriamo il lavoro elementare delle forze effettive negli spostamenti virtuali

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \delta \boldsymbol{r}_\nu. \tag{7}$$

Ma i differenziali virtuali, cioè i differenziali ad un determinato

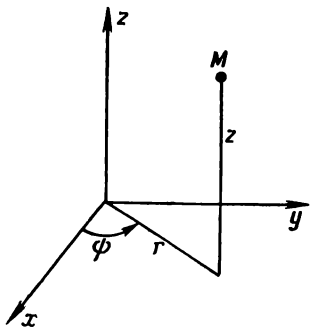


Fig. 21

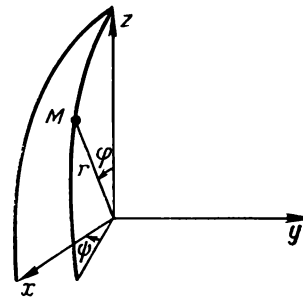


Fig. 22

tempo t « congelato » della funzione $\boldsymbol{r}_\nu(t, q_i)$ [1], sono gli spostamenti virtuali $\delta \boldsymbol{r}_\nu$:

$$\delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \delta q_i \quad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{8}$$

Sostituiamo l'espressione (8) nel membro destro della formula (7) ed esprimiamo il lavoro elementare delle forze effettive negli spostamenti virtuali in funzione degli incrementi arbitrari elementari δq_i delle coordinate indipendenti q_i $(i = 1, \ldots, n)$:

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i, \tag{9}$$

[1] Infatti, quando le funzioni $\boldsymbol{r}_\nu(t, q_i)$ $(\nu = 1, \ldots, N)$ sono sostituite nelle equazioni vincolari $f_\alpha(t, \boldsymbol{r}_\nu) = 0$ $(\alpha = 1, \ldots, d)$, queste ultime divengono delle identità. Differenziamo termine a termine le identità ottenute (fissando un tempo t). Allora troviamo

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, d), \tag{*}$$

dove $\delta \boldsymbol{r}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, N)$ sono differenziali virtuali. Ma le equazioni (*) coincidono con le prime d equazioni (7) di pag. 13 che determinano gli spostamenti virtuali di un sistema olonomo. Conseguentemente *i differenziali virtuali dei raggi vettori sono spostamenti virtuali di un sistema olonomo.*

dove i coefficienti di δq_i, le « forze generalizzate Q_i », sono determinati dalle equazioni

$$Q_i = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{10}$$

Si noti che per scopi pratici la formula (10) è lungi dall'essere sempre usata per trovare la quantità Q_i. Invece, il sistema è tale che, dato uno spostamento virtuale elementare, solo la i-sima coordinata q_i subisce un certo incremento, mentre le rimanenti

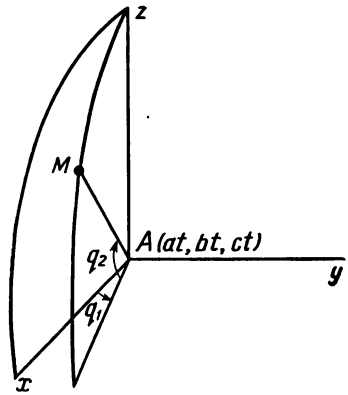


Fig. 23

coordinate indipendenti non cambiano. Dunque, il lavoro delle forze effettive δA_i è calcolato per un determinato spostamento scelto. Allora

$$\delta A_i = Q_i \, \delta q_i \quad \text{e} \quad Q_i = \frac{\delta A_i}{\delta q_i}.$$

Esempio 5. *Un corpo rigido è vincolato a muoversi con un moto traslatorio lungo l'asse x.* Quindi $n = 1$ e l'ascissa x di un punto del corpo A può essere assunta come coordinata indipendente. Quindi

$$\delta A = X \, \delta x, \tag{11}$$

dove X è la somma delle proiezioni, sull'asse x, di tutte le forze effettive agenti sul corpo. Ovviamente X è la forza generalizzata per la coordinata x:

$$Q = X. \tag{12}$$

Esempio 6. *Un corpo rigido è vincolato a ruotare attorno ad un asse fissato u.* L'angolo di rotazione φ può essere assunto come coordinata indipendente. Allora

$$\delta A = L_u \, \delta\varphi, \tag{13}$$

dove L_u è il momento totale di tutte le forze effettive rispetto all'asse di rotazione, e

$$Q = L_u. \tag{14}$$

Esempio 7. *Un corpo rigido libero.* Come coordinate indipendenti prendiamo le tre coordinate x_A, y_A, z_A di un punto A del corpo e i tre angoli

di Eulero ψ, θ, φ (vedi esempio 2 a pagg. 36-37). Allora, in accordo con l'equazione (9),

$$\delta A = Q_x\,\delta x + Q_y\,\delta y + Q_z\,\delta z + Q_\psi\,\delta\psi + Q_\theta\,\delta\theta + Q_\varphi\,\delta\varphi. \qquad (15)$$

Per determinare Q_x imponiamo al corpo uno spostamento elementare lungo l'asse x. Allora $\delta y_A = \delta z_A = 0$ e $\delta\psi = \delta\theta = \delta\varphi = 0$. Quindi $\delta A = Q_x \delta x_A$. Paragonando con la (11) otteniamo

$$Q_x = X.$$

Analogamente $Q_y = Y$, $Q_z = Z$. Qui X, Y, Z sono le proiezioni sugli assi stazionari x, y, z del vettore principale di tutte le forze effettive agenti sul corpo.

Ora imponiamo al nostro corpo uno spostamento elementare in modo tale che solo l'angolo ψ cambi, mentre le quantità x_A, y_A, z_A, θ e φ rimangano invariate. Allora

$$\delta A = Q_\psi\,\delta\psi.$$

D'altra parte, lo spostamento elementare del corpo è una rotazione attorno all'asse Az_1. Quindi, secondo la formula (13),

$$Q_\psi = L_\psi,$$

dove L_ψ è il momento totale di tutte le forze effettive rispetto all'asse Az_1, attorno al quale si effettua una rotazione di un angolo ψ.

In modo del tutto analogo $Q_\theta = L_\theta$ e $Q_\varphi = L_\varphi$, dove L_θ e L_φ sono i momenti totali delle forze effettive rispetto agli assi AN ed $A\zeta$.

Possiamo arrivare alle stesse espressioni per le forze generalizzate se usiamo l'espressione per il lavoro elementare delle forze effettive applicate ad un corpo rigido (vedi pag. 27) [1]:

$$\delta A = \boldsymbol{R}\,\delta\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{L}_A\boldsymbol{\omega}\,dt, \qquad (16)$$

dove $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{L}_A$ sono rispettivamente il vettore principale ed il momento principale del sistema delle forze attorno al polo A. Poiché (cfr. formula (4)) $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\psi + \boldsymbol{\omega}_\theta + \boldsymbol{\omega}_\varphi$, dove $\omega_\psi = \dot{\psi}$, $\omega_\theta = \dot{\theta}$, $\omega_\varphi = \dot{\varphi}$, e poiché le proiezioni del vettore $\boldsymbol{L}_A$ sulle direzioni dei vettori $\boldsymbol{\omega}_\psi$, $\boldsymbol{\omega}_\theta$, $\boldsymbol{\omega}_\varphi$ sono uguali, rispettivamente, a L_ψ, L_θ, L_φ, dalla formula (16) troviamo

$$\delta A = X\,\delta x_A + Y\,\delta y_A + Z\,\delta z_A + L_\psi\,\delta\psi + L_\theta\,\delta\theta + L_\varphi\,\delta\varphi. \qquad (17)$$

Paragonando le espressioni (17) e (15) otteniamo le espressioni delle forze generalizzate.

Ora si consideri una certa posizione del sistema come posizione di equilibrio. Secondo il principio degli spostamenti virtuali questo è vero se e solo se

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} Q_i\,\delta q_i = 0. \qquad (18)$$

Ma gli incrementi δq_i delle coordinate indipendenti q_i possono essere del tutto arbitrari. Quindi l'equazione (18) è equivalente

[1] Poiché abbiamo a che fare con un sistema scleronomo, al posto di δ possiamo scrivere d, e viceversa. Quindi $d\boldsymbol{r}_A = \delta\boldsymbol{r}_A$ e $\delta\psi = d\psi = \dot{\psi}\,dt$, $\delta\theta = \dot{\theta}\,dt$ e $\delta\varphi = \dot{\varphi}\,dt$.

al sistema di equazioni

$$Q_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{19}$$

Quindi, *la posizione di un sistema olonomo è una posizione di equilibrio se e solo se tutte le forze generalizzate in questa posizione sono nulle.*

Esempio 8. Secondo l'equazione (19), le condizioni di equilibrio di un corpo rigido libero possono essere così scritte:

$$X = Y = Z = 0, \quad L_\psi = L_\theta = L_\varphi = 0 \tag{20}$$

(vedi l'esempio precedente). Qui X, Y, Z sono le proiezioni sugli assi coordinati del vettore principale $\boldsymbol{R}$ delle forze esterne agenti sul corpo, e L_ψ, L_θ, L_φ sono le proiezioni del momento principale $\boldsymbol{L}_A$ di queste forze su tre direzioni non complanari. Per questa ragione, le equazioni scalari (20) sono equivalenti a due equazioni vettoriali

$$\boldsymbol{R} = 0, \quad \boldsymbol{L}_A = 0.$$

Queste sono le condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio di un corpo rigido libero che sono già state stabilite a pag. 27.

§ 6. *Equazioni di Lagrange del secondo tipo in coordinate indipendenti*

Per ottenere le equazioni differenziali del moto di un sistema olonomo in coordinate indipendenti $q_1, \ldots, q_n$, procediamo partendo dall'equazione generale della dinamica

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu)\, \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{1}$$

Richiamiamo l'espressione, ricavata nel § 5, del lavoro elementare delle forze effettive

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu\, \delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} Q_i\, \delta q_i, \tag{2}$$

dove

$$Q_i = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Analogamente è possibile rappresentare il lavoro elementare delle forze inerziali $-m_\nu \boldsymbol{w}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, N$):

$$\delta A_J = -\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_\nu\, \delta \boldsymbol{r}_\nu = -\sum_{i=1}^{n} Z_i\, \delta q_i, \tag{4}$$

dove, in analogia con l'espressione (3),

$$Z_i = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{d\dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{dt} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} =$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu \frac{d}{dt} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{5}$$

Ma la velocità

$$\dot{\boldsymbol{r}}_\nu = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t} \tag{6}$$

è linearmente dipendente da $\dot{q}_k$ ($k = 1, \ldots, n$). Da questa formula troviamo che

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n;\ \nu = 1, \ldots, N). \tag{7}$$

In altre parole, dalla stessa equazione (6) otteniamo

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i \, \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i \, \partial t} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \tag{8}$$

$$(i = 1, \ldots, n;\ \nu = 1, \ldots, N).$$

D'altra parte l'espressione (5) per Z_i può essere scritta anche nel seguente modo:

$$Z_i = \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

$$(i = 1, \ldots, n), \tag{9}$$

dove T è l'energia cinetica del sistema:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu^2. \tag{10}$$

L'equazione generale della dinamica (1) ci dà

$$\delta A + \delta A_J = 0 \tag{11}$$

oppure, per mezzo delle equazioni (2) e (4),

$$\sum_{i=1}^{n} (Q_i - Z_i)\, \delta q_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{12}$$

Poiché le q_i sono coordinate indipendenti e, per questa ragione le δq_i sono incrementi assolutamente arbitrari delle coordinate ($i = 1, \ldots, n$), ne segue che la (12) può valere quando e solo quando tutti i coefficienti delle δq_i, nell'equazione (12), sono

nulli. Perciò l'equazione generale della dinamica (12) è equivalente all'insieme delle equazioni

$$Z_i = Q_i \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{13}$$

che secondo le relazioni (9) possono essere anche scritte nella seguente forma:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{14}$$

Le equazioni (14) sono dette *equazioni di Lagrange del secondo tipo* o *equazioni di Lagrange in coordinate indipendenti.*

Le quantità $\dot{q}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ sono dette *velocità generalizzate.* Le velocità dei punti del sistema $v_\nu = \dot{r}_\nu$ sono espresse in funzione delle velocità generalizzate (ed anche in funzione delle coordinate indipendenti e del tempo) per mezzo delle formule (6). Le quantità $\ddot{q}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ sono dette *accelerazioni generalizzate.*

Dopo aver eseguito l'operazione $\frac{d}{dt}$, il membro sinistro delle equazioni di Lagrange (14) contiene il tempo t, le coordinate generalizzate q_i, le velocità generalizzate $\dot{q}_i$, e le accelerazioni generalizzate $\ddot{q}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Le forze generalizzate Q_i $(i = 1, \ldots, n)$ nel membro a destra delle equazioni di Lagrange sono ordinariamente specificate [1] come funzioni di t, q_k, $\dot{q}_k$ $(k = 1, \ldots, n)$:

$$Q_i = Q_i\,(t,\ q_k,\ \dot{q}_k) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{15}$$

Le equazioni di Lagrange (14) formano un insieme di n equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine in n funzioni incognite q_i della variabile indipendente t. L'ordine di questo sistema è $2n$. Si noti che l'insieme di equazioni differenziali, che determinano il moto di un sistema olonomo con n gradi di libertà, non può essere minore di $2n$, poiché per arbitrarietà dei valori iniziali delle quantità q_i e $\dot{q}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, la soluzione del sistema deve contenere almeno $2n$ costanti arbitrarie. Così, *l'insieme delle equazioni di Lagrange in coordinate indipendenti ha l'ordine il più basso possibile.*

Nel caso di un sistema vincolato, le forze di reazione $\boldsymbol{R}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, N)$ devono essere determinate allo stesso modo. Le forze di reazione non compaiono nelle equazioni di Lagrange. Questo è un notevole vantaggio delle equazioni di Lagrange. Dopo che le equazioni di Lagrange sono state integrate e le funzioni $q_i\,(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ trovate, le $r_\nu = r_\nu\,(t)$ sono determi-

[1] Vedi le formule (3) e (6) di questo paragrafo ed anche la formula (10) a pag. 16 e la formula (2′) a pag. 35.

nate (sostituendo queste funzioni nelle formule (2') a pag. 35) e, conseguentemente, $v_\nu = \dot{r}_\nu$, $w_\nu = \ddot{r}_\nu$ e $F_\nu(t, r_\nu, \dot{r}_\nu)$ ($\nu = 1, \ldots, N$). Dopo di ciò le forze di reazione incognite sono determinate dalle formule

$$R_\nu = m_\nu w_\nu - F_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{16}$$

Nel caso di un sistema libero di particelle, le equazioni di Lagrange sono una notazione compatta delle equazioni del moto in un sistema arbitrario di coordinate.

Esempio 1. *Un corpo rigido è in rotazione intorno ad un asse stazionario u.* Consideriamo come coordinata indipendente l'angolo di rotazione φ. L'appropriata forza generalizzata Q (vedi esempio 6 a pag. 39) è uguale al momento di rotazione L_u. D'altra parte, $T = \frac{1}{2} I_u \dot{\varphi}^2$, dove I_u è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione.

L'equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q$$

dopo la sostituzione di

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_u \dot{\varphi}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \qquad Q = L_u$$

assume la forma

$$I_u \ddot{\varphi} = L_u.$$

Questa è dunque l'*equazione differenziale della rotazione di un corpo rigido intorno ad un asse stazionario.*

Esempio 2. *Un pendolo doppio è in moto in un piano* (fig. 24). Scriviamo un'espressione per il lavoro elementare

$$\delta A = m_1 g\, \delta z_1 + m_2 g\, \delta z_2,$$

dove $z_1 = l_1 \cos \varphi_1$, $z_2 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2$.

Calcolando δz_1 e δz_2 troviamo

$$\delta A = -(m_1 + m_2)\, g l_1 \operatorname{sen} \varphi_1\, \delta\varphi_1 - m_2 g l_2 \operatorname{sen} \varphi_2\, \delta\varphi_2$$

e

$$Q_1 = -(m_1 + m_2)\, g l_1 \operatorname{sen} \varphi_1, \qquad Q_2 = -m_2 g l_2 \operatorname{sen} \varphi_2.$$

Cioè

$$T = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\, \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\, l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2.$$

La prima equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_1$$

ha la forma

$$\frac{d}{dt}[(m_1+m_2)\, l_1^2\dot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2)] + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \operatorname{sen}(\varphi_1-\varphi_2) =$$

$$= -(m_1+m_2)\, g l_1 \operatorname{sen} \varphi_1.$$

È lasciato al lettore calcolare la seconda equazione che corrisponde alla coordinata φ_2.

Esempio 3. Si richiede di determinare *le equazioni differenziali del moto di una particella libera in coordinate sferiche* (vedi esempio 3 di pag. 37, e fig. 22). La velocità delle particelle è uguale alla somma vettoriale di:

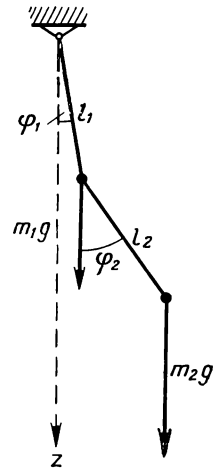


Fig. 24

a) la velocità radiale; b) la velocità di rotazione dovuta alla rotazione del raggio nel piano del meridiano; c) la velocità di rotazione dovuta alla rotazione del piano del meridiano. Le componenti della velocità sono mutuamente ortogonali e dunque

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\,(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi\, \dot{\psi}^2).$$

Per trovare la forza generalizzata Q_r, spostiamo la particella lungo il raggio. Allora $\delta A_r = F_r \delta r$, dove F_r è la proiezione della forza applicata $\boldsymbol{F}$ in direzione del raggio. Da cui $Q_r = F_r$.

Imponiamo ora alla particella uno spostamento elementare lungo il meridiano. Quindi $\delta A_\varphi = F_\varphi r\, \delta\varphi$, dove F_φ è la proiezione della forza $\boldsymbol{F}$ sulla tangente al meridiano [1]. Dunque

$$Q_\varphi = F_\varphi r.$$

Analogamente

$$Q_\psi = F_\psi r \operatorname{sen} \varphi,$$

dove F_ψ è la proiezione della forza $\boldsymbol{F}$ sulla tangente al parallelo.

[1] Tracciamo le tangenti al meridiano e i paralleli nella direzione dell'appropriato incremento delle coordinate φ e ψ.

L'equazione di Lagrange della coordinata r

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot r}-\frac{\partial T}{\partial r}=Q_r$$

assume la forma

$$m\,(\ddot r-r\dot\varphi^2-r\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\,\dot\psi^2)=F_r.$$

Per le coordinate φ e ψ troviamo

$$m\,(r\ddot\varphi+2\dot r\dot\varphi-r\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi\,\dot\psi^2)=F_\varphi,$$

$$m\,(r\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\ddot\psi+2\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\dot r\,\dot\psi+2r\cos\varphi\,\dot\varphi\dot\psi)=F_\psi.$$

Abbiamo ottenuto tre equazioni differenziali del moto di una particella libera in coordinate sferiche.

§ 7. *Studio delle equazioni di Lagrange*

Per ricavare le equazioni di Lagrange è necessario trovare prima l'espressione dell'energia cinetica in funzione del tempo t, delle coordinate generalizzate q_i e delle velocità generalizzate $\dot q_i$ $(i=1,\ldots,n)$. Questo è attuato nella forma generalizzata

$$T=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\dot{\boldsymbol r}_\nu^2=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol r_\nu}{\partial q_i}\dot q_i+\frac{\partial \boldsymbol r_\nu}{\partial t}\Big)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,\,k=1}^{n}a_{ik}\dot q_i\dot q_k+\sum_{i=1}^{n}a_i\dot q_i+a_0. \tag{1}$$

Qui, i coefficienti a_{ik}, a_i, a_0 sono funzioni di t, $q_1,\ldots,q_n$ definiti dalle equazioni

$$a_{ik}=\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\frac{\partial \boldsymbol r_\nu}{\partial q_i}\frac{\partial \boldsymbol r_\nu}{\partial q_k}\qquad(i,\ k=1,\ldots,n)^1, \tag{2}$$

$$a_i=\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\frac{\partial \boldsymbol r_\nu}{\partial q_i}\frac{\partial \boldsymbol r_\nu}{\partial t}\qquad(i=1,\ldots,n), \tag{3}$$

$$a_0=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\Big(\frac{\partial \boldsymbol r_\nu}{\partial t}\Big)^2. \tag{4}$$

La formula (1) mostra che l'energia cinetica di un sistema olonomo è una funzione (polinomio) di secondo grado rispetto alle velocità generalizzate:

$$T=T_2+T_1+T_0, \tag{5}$$

[1] Dalle formule (2) si può ricavare che $a_{ik}=a_{ki}$ $(i,\ k=1,\ldots,n)$.

dove

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad T_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i \dot{q}_i, \quad T_0 = a_0. \tag{6}$$

Come è stato spiegato nel § 1, nel caso di un sistema scleronomo, il tempo non compare esplicitamente nella relazione tra r_ν e q_i, e per questa ragione

$$\frac{\partial r_\nu}{\partial t} = 0 \quad (\nu = 1, \ldots, N).$$

Ma allora, in accordo con le equazioni (3) e (4),

$$a_0 = 0, \quad a_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

e

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k.$$

Dunque, *l'energia cinetica di un sistema scleronomo si presenta nella forma di una funzione omogenea di secondo grado (forma quadratica) delle velocità generalizzate.*

Si osservi che in un arbitrario sistema olonomo (scleronomo o reonomo), la forma di T_2 è sempre non degenere, cioè un determinante ricavato dai suoi coefficienti è diverso da zero:

$$\det (a_{ik})_{i,\,k=1}^{n} \neq 0. \tag{7}$$

Infatti, se

$$\det (a_{ik})_{i,\,k=1}^{n} \equiv 0$$

il sistema di equazioni lineari omogenee

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \lambda_k = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{8}$$

ha una soluzione reale non nulla.

Moltiplicando l'insieme delle equazioni (8) termine a termine per λ_i e sommando rispetto all'indice i da 1 a n e utilizzando le formule (2), otteniamo

$$0 = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} \lambda_i \lambda_k = \sum_{i,\,k=1}^{n} \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial r_\nu}{\partial q_i} \frac{\partial r_\nu}{\partial q_k} \right) \lambda_i \lambda_k =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial r_\nu}{\partial q_i} \right)^2.$$

Da cui

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial r_\nu}{\partial q_i} = 0 \quad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{9}$$

Queste N equazioni vettoriali possono essere sostituite da $3N$ equazioni scalari:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \lambda_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_\nu}{\partial q_i} \lambda_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z_\nu}{\partial q_i} \lambda_i = 0 \quad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{9'}$$

Le equazioni (9') mostrano che nella matrice funzionale jacobiana

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial x_1}{\partial q_1}, & \ldots, & \frac{\partial x_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial y_1}{\partial q_1}, & \ldots, & \frac{\partial y_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial z_1}{\partial q_1}, & \ldots, & \frac{\partial z_1}{\partial q_n} \\ \ldots\ldots\ldots & & \\ \ldots\ldots\ldots & & \\ \frac{\partial x_N}{\partial q_1}, & \ldots, & \frac{\partial x_N}{\partial q_n} \\ \frac{\partial y_N}{\partial q_1}, & \ldots, & \frac{\partial y_N}{\partial q_n} \\ \frac{\partial z_N}{\partial q_1}, & \ldots, & \frac{\partial z_N}{\partial q_n} \end{array} \right\| \tag{10}$$

le colonne sono linearmente dipendenti, cioè il rango ρ di questa matrice funzionale è minore di n. Allora tra le $3N$ funzioni $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N$ degli n argomenti $q_1, \ldots, q_n$ (t è considerato un parametro) ci sono ρ quantità indipendenti in funzione delle quali possono essere espresse tutte le rimanenti coordinate cartesiane dei punti del sistema. Questa è una contraddizione, poiché il numero minimo di coordinate indipendenti del sistema deve essere uguale al numero dei gradi di libertà n, mentre $\rho < n$. La disuguaglianza (7) è così stabilita [1].

La proprietà dei coefficienti della forma quadratica T_2 espressa dalla disuguaglianza (7) è molto importante e ne faremo uso più volte in seguito. Si osservi che, poiché si ha sempre $T_2 \geqslant 0$ (T_2 è l'energia cinetica nel caso dei vincoli « congelati »!) segue dalla disuguaglianza (7) che la forma quadratica $T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k$ è definita positiva, cioè $T_2 \geqslant 0$, e si ha $T_2 = 0$ solo quando tutte le $\dot{q}_i$ ($i = 1, \ldots, n$) sono uguali a zero. Dunque, per i coefficienti

[1] Il rango della matrice funzionale (10) può essere minore di n nei punti singolari. In questi punti l'uguaglianza $\det (a_{ik})_{k=1} = 0$ è possibile In seguito non considereremo queste posizioni particolari del sistema.

a_{ik} abbiamo il determinante di Sylvester [1]

$$a_{11}>0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots, \ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0. \qquad (11)$$

Inserendo l'espressione (1) dell'energia cinetica nelle equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i=1, \ldots, n) \qquad (12)$$

otteniamo

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ddot{q}_k + (**) = Q_i(t, q_j, \dot{q}_j) \quad (i=1, \ldots, n). \qquad (13)$$

Qui, il simbolo (**) indica la somma dei termini che non includono le derivate seconde rispetto alle coordinate del tempo. I termini a destra delle uguaglianze non contengono le derivate seconde, poiché nel caso generale sono funzioni delle quantità t, q_j, $\dot{q}_j$ ($j = 1, \ldots, n$).

Poiché $\det (a_{ik})_{i,\,k=1}^{n} \neq 0$ segue che le equazioni (13) possono essere risolte nelle derivate seconde e rappresentate nella forma

$$\ddot{q}_i = G_i(t, q_k, \dot{q}_k) \quad (i=1, \ldots, n). \qquad (14)$$

Ma allora, come sappiamo dalla teoria delle equazioni differenziali, per certe assunzioni relative ai membri destri G_i, che in meccanica sono sempre soddisfatte [2], c'è una e una sola soluzione delle equazioni di Lagrange per arbitrari valori iniziali, preassegnati, q_i^0, $\dot{q}_i^0$ con $t = t_0$ ($i = 1, \ldots, n$). Dunque, il moto di un sistema olonomo è unicamente determinato dalla specificazione delle posizioni iniziali (q_i^0) e delle velocità iniziali ($\dot{q}_i^0$).

§ 8. *Teorema della variazione dell'energia totale. Forze potenziali, dissipative e giroscopiche*

Se le forze generalizzate non dipendono dalle velocità generalizzate

$$Q_i = Q_i(t, q_1, \ldots, q_n) \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad (1)$$

e se esiste la funzione $\Pi(t, q_1, \ldots, q_n)$ tale che

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i=1, \ldots, n), \qquad (2)$$

[1] Vedi, per esempio. F.R. Gantmacher, *Teoria delle matrici*, Mosca 1953, pag. 248 (ed. russa).

[2] Per esempio, se le funzioni G_i ($i = 1, \ldots, n$) hanno derivate parziali continue del primo ordine.

allora le forze Q_i sono dette *potenziali* e la funzione Π è il *potenziale delle forze* o *energia potenziale*. Le equazioni (2), che determinano il potenziale Π, possono essere così scritte [1]:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = -\delta \Pi. \tag{3}$$

Ora consideriamo il caso generale in cui, oltre alle forze potenziali determinate dal potenziale Π, sul sistema agiscono anche forze non potenziali

$$\tilde{Q}_i = \tilde{Q}_i(t, q_j, \dot{q}_j) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

Allora

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \tilde{Q}_i \tag{5}$$

e le equazioni di Lagrange assumono la forma

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \tilde{Q}_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

Ora consideriamo l'energia totale E, che è uguale alla somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale

$$E = T + \Pi \tag{7}$$

e calcoliamo la derivata $\frac{dE}{dt}$. Troviamo prima

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) + \frac{\partial T}{\partial t} =$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial t}. \tag{8}$$

---

[1] Prima si fissa il tempo t quando si calcola il differenziale virtuale $\delta\Pi$. Dunque, $\delta\Pi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \delta q_i$.

Notando che $T = T_2 + T_1 + T_0$ e utilizzando le equazioni di Lagrange (6), otteniamo [1]

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}(2T_2 + T_1) + \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \tilde{Q}_i \right) \dot{q}_i =$$

$$= 2\frac{dT}{dt} - \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) + \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{d\Pi}{dt} - \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i \dot{q}_i. \qquad (9)$$

Da ciò, tenendo in considerazione l'equazione (7), otteniamo

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i \dot{q}_i + \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) - \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \Pi}{\partial t}. \qquad (10)$$

L'espressione a destra

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i \dot{q}_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i \, dq_i}{dt} = \frac{\delta \tilde{A}}{dt}, \qquad (11)$$

dove $\delta \tilde{A}$ è il lavoro elementare delle forze non potenziali $\tilde{Q}_i$, è la *potenza* delle forze non potenziali $\tilde{Q}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Il termine a destra

$$\frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) - \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (12)$$

è diverso da zero solo per un sistema reonomo (per un sistema scleronomo $T_1 = T_0 = 0$ e $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$). Il secondo termine non è nullo solo quando l'energia potenziale Π è esplicitamente dipendente dal tempo.

La formula (10) *determina la variazione dell'energia totale di un sistema olonomo arbitrario in moto.* Consideriamo qualche caso particolare.

---

[1] La formula di Eulero $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = mf$ vale per una funzione omogenea $f(x_1, \ldots, x_n)$ di m-esimo grado. Applicando questa formula alla forma lineare T_1 e alla forma quadratica T_2, troviamo

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T_2, \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = T_1.$$

La validità di questa identità segue anche direttamente dalle espressioni di T_2 e T_1 date a pag. 47.

a) *Un sistema è scleronomo.* Allora

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i \dot{q}_i + \frac{\partial \Pi}{\partial t}. \tag{13}$$

b) *Un sistema è scleronomo e l'energia potenziale non dipende esplicitamente dal tempo.* Allora

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i \dot{q}_i. \tag{14}$$

Per questo sistema *la derivata dell'energia totale rispetto al tempo è uguale alla potenza delle forze non potenziali.*

c) *Un sistema è conservativo*, cioè: 1) un sistema è scleronomo; 2) tutte le forze sono potenziali e 3) l'energia potenziale Π non dipende esplicitamente dal tempo. Secondo l'equazione (10), per un sistema conservativo

$$\frac{dE}{dt} = 0, \tag{15}$$

cioè per qualunque moto del sistema

$$E = \text{cost} = h. \tag{16}$$

L'energia totale di un sistema conservativo non varia quando il sistema è in moto.

L'equazione (16), che non contiene le $\ddot{q}_i$ ma contiene la costante arbitraria h, determina l'integrale primo delle equazioni del moto. L'equazione (16) è detta *integrale dell'energia.*

Le forze non potenziali sono dette *giroscopiche* se la loro potenza è nulla

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i \dot{q}_i = 0 \tag{17}$$

e *dissipative* se la loro potenza [1] è negativa o nulla:

---

[1] Nel caso di un sistema scleronomo

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \, d\boldsymbol{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} Q_i \, dq_i$$

da cui, dopo aver diviso ogni termine per dt, ricaviamo

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \, \boldsymbol{v}_\nu = \sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i. \tag{*}$$

Per questa ragione l'equazione (17) esprime la condizione di giroscopicità

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \boldsymbol{v}_\nu = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \widetilde{Q}_i \dot{q}_i \leqslant 0. \tag{18}$$

Se l'energia potenziale non dipende esplicitamente dal tempo t allora dalle equazioni (14) e (17) segue che $\frac{dE}{dt} = 0$, e così *per un sistema scleronomo con forze giroscopiche abbiamo anche che l'integrale dell'energia è*

$$E = \text{cost.}$$

Ma se tale sistema è sottoposto a forze dissipative allora quando il sistema è in moto

$$\frac{dE}{dt} \leqslant 0,$$

cioè l'energia totale diminuisce durante il moto [1]. In questo caso chiamiamo il sistema *sistema dissipativo.*

Nelle relazioni (17) e (18) le forze generalizzate $\widetilde{Q}_i$, nel caso generale, dipendono dalle velocità generalizzate. Consideriamo qualche caso particolare importante in cui questa dipendenza è lineare ed omogenea.

1. Sia

$$\widetilde{Q}_i = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} \dot{q}_k \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{19}$$

e sia la matrice dei coefficienti γ_{ik} antisimmetrica

$$\gamma_{ik} = -\gamma_{ki} \quad (i, k = 1, \ldots, n)\ [2]. \tag{20}$$

Allora le forze (19) sono giroscopiche.

In realtà, in questo caso

$$\sum_{i=1}^{n} \widetilde{Q}_i \dot{q}_i = \sum_{i,k=1}^{n} \gamma_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ii} \dot{q}_i^2 + \sum_{i<k}^{1,\ldots,n} (\gamma_{ik} + \gamma_{ki}) \dot{q}_i \dot{q}_k = 0.$$

---

e l'equazione (18) la condizione di dissipazione

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \boldsymbol{v}_\nu \leqslant 0.$$

Nel caso di un sistema reonomo, l'equazione (*) può non valere. Allora $\delta \boldsymbol{r}_\nu = d\boldsymbol{r}_\nu - \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t} dt$ e dall'equazione $\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i$ segue che

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \left(\boldsymbol{v}_\nu - \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t} \right) = \sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i.$$

[1] Nel caso di forze dissipative si ha una dissipazione di energia. Di qui il termine « forze dissipative ».

[2] Nel caso di una matrice antisimmetrica $\| \gamma_{ik} \|$, risulta sempre $\gamma_{ii} = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Questa equazione mostra che l'antisimmetria della matrice dei coefficienti γ_{ik} non è solo una condizione sufficiente, ma anche necessaria perché le forze (19) applicate al sistema scleronomo siano giroscopiche.

Esempio 1. *Per un sistema scleronomo, le forze di inerzia di Coriolis sono giroscopiche.* Infatti, la forza di inerzia di Coriolis applicata ad una particella P_ν di un sistema è determinata dalla formula

$$F_\nu = -2m_\nu (\omega \times v_\nu),$$

dove m_ν è la massa della particella P_ν, v_ν è la sua velocità rispetto ad un sistema non inerziale di assi coordinati considerati, e ω è la velocità angolare rispetto a qualche sistema inerziale di coordinate ($\nu = 1, \ldots, N$). Allora

$$\sum_{\nu=1}^{N} F_\nu v_\nu = 0.$$

Esempio 2. Sia un corpo rigido con un punto stazionario O sottoposto all'azione di più forze con momento principale $L_O = I(\omega_1 \times \omega_2)$, dove I è uno scalare, e $\omega = \omega_1 + \omega_2$ è la velocità angolare del corpo. Allora le forze applicate al corpo sono giroscopiche poiché la loro potenza è nulla

$$L_O \omega = 0.$$

Se il corpo rigido possiede una simmetria dinamica, I è il momento d'inerzia rispetto all'asse di simmetria, ω_2 è la velocità angolare di « pura rotazione » diretta lungo l'asse di simmetria e ω_1 è la velocità angolare del moto di precessione, per cui il momento $L_O = I(\omega_1 \times \omega_2)$ è detto *giroscopico*. Allora le forze che creano il momento giroscopico sono giroscopiche.

- 2. Sia

$$\tilde{Q}_i = -\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_k \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{21}$$

dove la matrice dei coefficienti b_{ik} è simmetrica:

$$b_{ik} = b_{ki} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{21'}$$

e sia la forma quadratica $\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$ positiva, cioè

$$\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k \geqslant 0. \tag{22}$$

Allora per un sistema scleronomo la potenza delle forze è uguale a

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i\dot{q}_i = -\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k \leqslant 0 \tag{23}$$

e le forze $\tilde{Q}_i$ sono dissipative.

In questo caso la forma quadratica

$$R = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k \tag{24}$$

è detta *funzione dissipativa di Rayleigh*. È facile vedere che le forze generalizzate (21) sono ottenute dalla funzione dissipativa di Rayleigh per mezzo di

$$\tilde{Q}_i = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{25}$$

Se il sistema è scleronomo e se l'energia potenziale non dipende esplicitamente dal tempo, allora in virtù delle uguaglianze (14), (23) e (25) si ha

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i \dot{q}_i = -2R. \tag{26}$$

Questa formula puntualizza il significato fisico della funzione di Rayleigh: *la funzione di Rayleigh raddoppiata rappresenta quanto rapidamente decresce l'energia totale.*

Se la funzione di Rayleigh (24) è una forma quadratica definita positiva delle velocità generalizzate allora si parla di *dissipazione totale di energia.* In questo caso, chiameremo il sistema *dissipativo definito.* Secondo la formula (26), l'energia totale di un tale sistema diminuisce rigorosamente.

A titolo d'esempio consideriamo le forze di resistenza del mezzo applicate ai punti del sistema, essendo le forze proporzionali alle potenze prime delle velocità dei punti:

$$\boldsymbol{F}_\nu = -\beta \boldsymbol{v}_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{27}$$

In questo caso

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \boldsymbol{v}_\nu = -2R, \tag{28}$$

dove

$$R = \frac{1}{2}\beta \sum_{\nu=1}^{N} v_\nu^2. \tag{29}$$

§ 9. *Analogie elettromeccaniche*

In questo paragrafo mostreremo come le equazioni della meccanica analitica possono essere applicate non solo a sistemi meccanici ma anche a sistemi elettrici e elettromeccanici.

Consideriamo un circuito con un'induttanza L, una resistenza R e una capacità C collegate in serie (fig. 25). Per questi elementi, la relazione tra il voltaggio u (la differenza di potenziale ai capi di ogni elemento) e la corrente i $\left(i = \frac{dq}{dt}\right.$, dove q è la carica$\left.\right)$ sarà, rispettivamente, uguale a

$$u = L\frac{di}{dt}, \quad u = Ri, \quad u = \frac{1}{C}\int i\,dt. \tag{1}$$

Se inoltre il circuito ha una sorgente esterna di forza elettromotrice $e(t)$, allora scriviamo che la forza elettromotrice è uguale

alla somma dei voltaggi applicati ai singoli elementi, e abbiamo

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int i\,dt=e(t) \qquad (2)$$

oppure

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=e(t). \qquad (3)$$

Questa equazione è analoga all'equazione delle oscillazioni meccaniche

$$a\frac{d^2q}{dt^2}+b\frac{dq}{dt}+cq=Q(t). \qquad (4)$$

Qui all'induttanza L corrisponde il coefficiente inerziale (la massa generalizzata) a, alla resistenza ohmica R il coefficiente di dissipazione b, al coefficiente $\frac{1}{C}$, dove C è la capacità, corri-

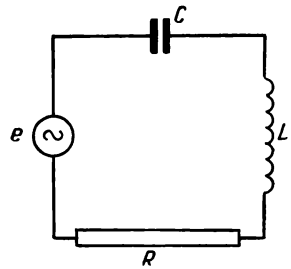


Fig. 25

sponde il coefficiente ridotto della forza elastica c; la carica q corrisponde alla coordinata generalizzata e la forza elettromotrice

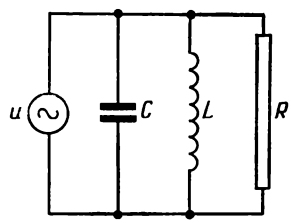


Fig. 26

$e(t)$ alla forza generalizzata $Q(t)$.

D'altra parte, nel circuito mostrato nella fig. 26, le correnti che circolano attraverso l'induttore, il resistore e il capacitore sono additive, cioè

$$\frac{u}{R}+\frac{1}{L}\int u\,dt+C\frac{du}{dt}=i(t) \qquad (5)$$

Differenziando termine a termine, otteniamo

$$C\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{du}{dt}+\frac{1}{L}u=\frac{di}{dt}.$$

Qui abbiamo un altro sistema di analogie in cui il voltaggio u corrisponde alla coordinata q, i coefficienti meccanici a, b, c sono sostituiti da C, $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{L}$, e la quantità $\frac{di}{dt}$ corrisponde alla forza generalizzata $Q(t)$.

Due sistemi elettrici aventi le stesse equazioni (come notazioni) *sono due analogie elettriche differenti di uno stesso sistema meccanico.*

All'energia cinetica ed a quella potenziale, alla funzione di Rayleigh e alla forza generalizzata di un sistema meccanico con un grado di libertà

$$T=\frac{1}{2}a\dot{q}^2,\quad \widetilde{R}=\frac{1}{2}b\dot{q}^2,\quad \Pi=\frac{1}{2}cq^2,\quad Q=Q(t)$$

nel primo sistema di analogie corrispondono le quantità

$$T=\frac{1}{2}L\dot{q}^2,\quad \widetilde{R}=\frac{1}{2}R\dot{q}^2,\quad \Pi=\frac{1}{2C}q^2,\quad e=e(t)$$

e nel secondo, le quantità

$$T=\frac{1}{2}C\dot{u}^2,\quad \widetilde{R}=\frac{1}{2R}\dot{u}^2,\quad \Pi=\frac{1}{2L}u^2,\quad \frac{di}{dt}.$$

Così, i sistemi di analogie elettromeccaniche sono determinati dalla seguente tabella:

Meccanica: q	a	b	c	Q	$T=\frac{1}{2}a\dot{q}^2$	$\widetilde{R}=\frac{1}{2}b\dot{q}^2$	$\Pi=\frac{1}{2}cq^2$
1ª elettrica: q	L	R	$\frac{1}{C}$	e	$\frac{1}{2}L\dot{q}^2$	$\frac{1}{2}R\dot{q}^2$	$\frac{1}{2C}q^2$
2ª elettrica: u	C	$\frac{1}{R}$	$\frac{1}{L}$	$\frac{di}{dt}$	$\frac{1}{2}C\dot{u}^2$	$\frac{1}{2R}\dot{u}^2$	$\frac{1}{2L}u^2$

Si consideri il circuito elettrico rappresentato nella fig. 27 come esempio di un caso più complesso.

Formiamo le equazioni di Lagrange secondo il primo sistema di analogie; prima si calcoli

$$T=\frac{1}{2}L_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}L_{23}(\dot{q}_2-\dot{q}_3)^2,$$

$$\widetilde{R}=\frac{1}{2}R_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}R_2\dot{q}_2^2+\frac{1}{2}R_3\dot{q}_3^2,$$

$$\Pi=\frac{1}{2C_3}q_3^2+\frac{1}{2C_{12}}(q_1-q_2)^2.$$

Inoltre $e_2 = e_3 = 0$. Poniamo

$$e_1 = A \operatorname{sen} \Omega t.$$

Dunque, le equazioni di Lagrange hanno la forma

$$L_1 \ddot{q}_1 + R_1 \dot{q}_1 + \frac{1}{C_{12}} q_1 - \frac{1}{C_{12}} q_2 = A \operatorname{sen} \Omega t,$$

$$L_{23} \ddot{q}_2 - L_{23} \ddot{q}_3 + R_2 \dot{q}_2 + \frac{1}{C_{12}} q_2 - \frac{1}{C_{12}} q_1 = 0,$$

$$L_{23} \ddot{q}_3 - L_{23} \ddot{q}_2 + R_3 q_3 + \frac{1}{C_3} q_3 = 0.$$

Queste equazioni saranno le equazioni del circuito elettrico

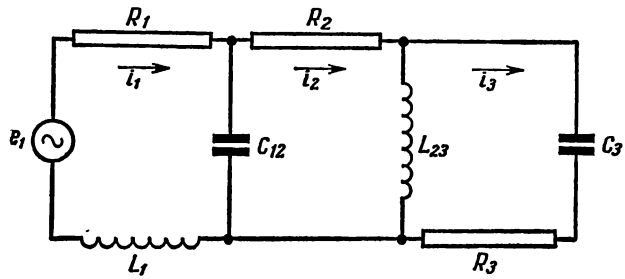


Fig. 27

rappresentato nella fig. 27.

§ 10. *Equazioni di Appell per sistemi non olonomi. Pseudocoordinate*

In questo paragrafo ricaveremo le equazioni di Appell che determinano il moto di un sistema non olonomo. Consideriamo applicati a un sistema non olonomo d vincoli finiti e g vincoli differenziali (vedi § 1). Prima utilizzando solo i d vincoli finiti, esprimiamo i vettori radiali dei punti del sistema in funzione di $m = 3N - d$ coordinate indipendenti $q_1, \ldots, q_m$ e del tempo t:

$$\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu(t, q_1, \ldots, q_m) \quad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{1}$$

Da questo

$$\dot{\boldsymbol{r}}_\nu = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t} \quad (\nu = 1, \ldots, N) \tag{2}$$

e

$$\delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \delta q_i \quad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{2'}$$

Però, r_ν e $\dot{r}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, N$) soddisfano anche i vincoli differenziali [1]

$$\sum_{\nu=1}^{N} l_{\beta\nu}\dot{r}_\nu + D_\beta = 0 \quad (\beta = 1, \ldots, g), \tag{3}$$

dove $l_{\beta\nu}$ e D_β sono funzioni di t e r_ν ($\nu = 1, \ldots, N$).

Sostituendo le espressioni (1) e (2) per r_ν e $\dot{r}_\nu$ nelle equazioni del vincoli (3), rappresentiamo queste equazioni in forma

$$\sum_{i=1}^{m} A_{\beta i}\dot{q}_i + A_\beta = 0 \quad (\beta = 1, \ldots, g), \tag{4}$$

dove i coefficienti $A_{\beta i}$ di $\dot{q}_i$ e il termine assoluto A_β sono funzioni di t e $q_1, \ldots, q_m$.

Dunque, per un sistema non olonomo le coordinate $q_1, \ldots, q_m$ possono assumere valori arbitrari, ma allora le velocità generalizzate $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m$ non possono essere grandi arbitrariamente; esse sono legate dalla relazione (4). Considerando i g vincoli della (4) indipendenti, possiamo esprimere g velocità generalizzate per mezzo delle equazioni (4), per esempio $\dot{q}_{n+1}, \ldots, \dot{q}_m$ in funzione delle restanti $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ ($n = m - g = 3N - d - g$ è il numero dei gradi di libertà del sistema; vedi pag. 15). Le velocità $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ possono avere valori arbitrari e dunque i valori delle rimanenti velocità saranno determinati.

Seguiremo però la via più generale e come quantità indipendenti considereremo non le n (n è il numero di gradi di libertà) velocità generalizzate, bensì alcune delle n combinazioni lineari indipendenti di queste velocità [2]

$$\dot{\pi}_s = \sum_{i=1}^{m} f_{si}\dot{q}_i \quad (s = 1, \ldots, n), \tag{5}$$

dove f_{si} sono funzioni di t e $q_1, \ldots, q_m$.

È necessario imporre una sola condizione alla forma lineare (5): queste n forme lineari, insieme alle g forme lineari

$$\sum_{i=1}^{m} A_{\beta i}\dot{q}_i \quad (\beta = 1, \ldots, g)$$

debbono costituire un sistema completo di $m = n + g$ forme linearmente indipendenti; cioè il determinante composto dai

[1] Le funzioni (1), quando sono sostituite nelle equazioni dei vincoli finiti, cambiano queste ultime in identità. Dunque, quando si usa la rappresentazione (1) è necessario considerare solo i vincoli differenziali.

[2] Sarà conveniente rappresentare le combinazioni lineari (5) con $\dot{\pi}_s$, nonostante che il simbolo π_s sia privo di significato, poiché il termine destro della (5) può non essere una derivata totale.

coefficienti di queste m forme deve essere diverso da zero. Allora le quantità $\dot{\pi}_s$ ($s = 1, \ldots, n$) possono assumere valori arbitrari, poiché per ogni valore di queste quantità troveremo le corrispondenti $\dot{q}_i$ ($i = 1, \ldots, m$), risolvendo il sistema delle equazioni lineari (4) e (5). In tal modo otteniamo

$$\dot{q}_i = \sum_{s=1}^{n} h_{is}\dot{\pi}_s + h_i \quad (i = 1, \ldots, m), \tag{6}$$

dove h_{is} e h_i sono funzioni di t e $q_1, \ldots, q_m$.

Le quantità $\dot{\pi}_s$, che sono forme lineari di velocità generalizzate, possono essere chiamate *pseudovelocità*, e i simboli π_s, *pseudocoordinate* ($s = 1, \ldots, n$). In particolare, le $\dot{\pi}_s$ possono coincidere con alcune velocità generalizzate. Ma nel caso generale le $m + n$ quantità, $\dot{\pi}_s$ e $\dot{q}_i$ sono legate dalle relazioni (5) e (6).

Per trovare le restrizioni imposte dai vincoli differenziali sugli spostamenti virtuali δq_i è necessario (vedi § 2) scartare nelle equazioni (4) i termini assoluti A_β e sostituire $\dot{q}_i$ con δq_i ($i = 1, \ldots, n$). Così otteniamo

$$\sum_{i=1}^{m} A_{\beta i}\delta q_i = 0 \quad (\beta = 1, \ldots, g). \tag{4'}$$

In accordo con le equazioni (5) introduciamo la notazione [1]

$$\delta\pi_s = \sum_{i=1}^{m} f_{si}\delta q_i \quad (s = 1, \ldots, n). \tag{5'}$$

Per come sono state definite, le forme (4') e (5') sono linearmente indipendenti. Dunque, i $\delta\pi_s$ possono assumere valori arbitrari mentre i corrispondenti δq_i saranno determinati dall'insieme delle equazioni (4') e (5'):

$$\delta q_i = \sum_{s=1}^{n} h_{is}\,\delta\pi_s \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{6'}$$

L'espressione per il lavoro delle forze elementari negli spostamenti virtuali può essere data come

$$\delta A = \sum_{i=1}^{m} Q_i\,\delta q_i, \tag{7}$$

dove, come per i sistemi olonomi,

$$Q_i = \sum_{\nu=1}^{N} F_\nu \frac{\partial r_\nu}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, m).$$

[1] Nel caso di un sistema scleronomo $\delta q_i = dq_i = \dot{q}_i\,dt$ dunque, in accordo con le formule (5) e (5'), $\delta\pi_s = \dot{\pi}_s\,dt$.

Ora, sostituendo nella (7) le espressioni (6′) al posto delle δq_i, otteniamo

$$\delta A = \sum_{i=1}^{m} Q_i \sum_{s=1}^{n} h_{is}\, \delta\pi_s = \sum_{s=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} h_{is} Q_i\Big)\, \delta\pi_s,$$

cioè

$$\delta A = \sum_{s=1}^{n} \Pi_s\, \delta\pi_s, \tag{8}$$

dove

$$\Pi_s = \sum_{i=1}^{m} h_{is} Q_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{N} h_{is} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \boldsymbol{F}_\nu \quad (s = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Chiameremo le quantità Π_s *forze generalizzate corrispondenti alle pseudocoordinate* π_s $(s = 1, \ldots, n)$.

In altre parole, sostituendo nella (2) a $\dot{q}_i$ le espressioni (6) otteniamo

$$\dot{\boldsymbol{r}}_\nu = \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{e}_{\nu s} \dot{\pi}_s + \boldsymbol{e}_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, N), \tag{10}$$

dove $\boldsymbol{e}_{\nu s}$ e $\boldsymbol{e}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, N;\ s = 1, \ldots, n)$ sono certe funzioni vettoriali di t e $q_1, \ldots, q_m$.

Dalle equazioni (10) troviamo [1]

$$\delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{e}_{\nu s}\, \delta\pi_s \quad (\nu = 1, \ldots, N) \tag{11}$$

e

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_\nu = \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{e}_{\nu s} \ddot{\pi}_s + \ldots \quad (\nu = 1, \ldots, N), \tag{12}$$

dove, nel membro destro della (12), si considerano solo i termini contenenti le *pseudoaccelerazioni* $\ddot{\pi}_s$ $(s = 1, \ldots, n)$.

Per mezzo delle equazioni (8) e (11) si ricava l'equazione generale della dinamica

$$\delta A - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu\, \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0; \tag{13}$$

---

[1] Le quantità $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$, $\dot{\pi}_s$ e $\dot{q}_i$ sono legate dalle relazioni (2), (4) e (5). Eliminando $\dot{q}_i$ da queste relazioni troviamo le formule (10). Le quantità $\delta \boldsymbol{r}_\nu$, $\delta\pi_s$, δq_i soddisfano le relazioni omogenee (2′), (4′) e (5′), che differiscono dalle (2), (4) e (5) solo per l'assenza dei termini assoluti. Per questa ragione, anche le formule (11), che sono il risultato dell'eliminazione di δq_i dalle (2′), (4′) e (5′), si ottengono dalle (10) sostituendo $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ con $\delta \boldsymbol{r}_\nu$, $\dot{\pi}_s$ con $\delta\pi_s$ ed eliminando i termini assoluti $\boldsymbol{e}_\nu$.

ne segue

$$\sum_{s=1}^{n} \left(\Pi_s - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{r}_\nu e_{\nu s}\right) \delta\pi_s = 0. \tag{14}$$

Poiché $\delta\pi_s$ sono dei moltiplicatori arbitrari, ne segue che

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{r}_\nu e_{\nu s} = \Pi_s \quad (s = 1, \ldots, n). \tag{15}$$

Introduciamo ora l'« energia delle accelerazioni »

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{r}_\nu^2 = U(t, q_i, \dot{\pi}_s, \ddot{\pi}_s) \tag{16}$$

Si osservi che, in base alle formule (12),

$$e_{\nu s} = \frac{\partial \ddot{r}_\nu}{\partial \ddot{\pi}_s} \quad (\nu = 1, \ldots, N;\ s = 1, \ldots, n) \tag{17}$$

le equazioni (15) si possono scrivere come segue:

$$\frac{\partial U}{\partial \ddot{\pi}_s} = \Pi_s \quad (s = 1, \ldots, n). \tag{18}$$

Le equazioni (18) le ricavò per primo Appell e per questo furono chiamate *equazioni di Appell.*

Queste $n = 3N - d - g$ equazioni differenziali, insieme alle g equazioni vincolari,

$$\sum_{i=1}^{m} A_{\beta i} \dot{q}_i + A_\beta = 0 \quad (\beta = 1, \ldots, g) \tag{19}$$

e le n relazioni differenziali

$$\dot{\pi}_s = \sum_{i=1}^{m} f_{si} \dot{q}_i, \tag{20}$$

formano il sistema di equazioni differenziali che determina il moto di un sistema non olonomo.

Scriviamo le equazioni di Appell in forma estesa. Per fare ciò inseriamo le espressioni (12) nella formula (15) al posto di $\ddot{r}_\nu$. Allora otteniamo

$$\sum_{s=1}^{n} u_{\rho s} \ddot{\pi}_s + (**) = \Pi_\rho \quad (\rho = 1, \ldots, n), \tag{21}$$

dove

$$\Pi_\rho = \Pi_\rho(t, q_i, \dot{\pi}_s), \quad u_{\rho s} = u_{\rho s}(t, q_i) = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu e_{\nu s} e_{\nu \rho} \tag{22}$$

$$(\rho, s = 1, \ldots, n).$$

Il simbolo (**) nelle equazioni (21) denota i termini che non contengono le pseudoaccelerazioni $\ddot{\pi}_s$ $(s = 1, \ldots, n)$.

Può essere dimostrato che un determinante composto da coefficienti $u_{\rho s}$ non è identicamente uguale a zero:

$$\det (u_{\rho s})_{\rho, s=1}^{n} \neq 0 \text{ [1]}. \tag{23}$$

Allora le equazioni (21) possono essere risolte nelle pseudoaccelerazioni

$$\dot{\pi}_s = H_s (t, q_i, \pi_\rho) \quad (s = 1, \ldots, n). \tag{24}$$

D'altra parte, le relazioni (19) e (20) possono anche essere rappresentate in una forma risolta in $\dot{q}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ (vedi le formule (6)).

Dunque, il moto di un sistema non olonomo è determinato da un sistema di $n+m$ equazioni differenziali del primo ordine delle funzioni incognite $q_1, \ldots, q_m, \pi_1, \ldots, \pi_n$, e queste equazioni sono risolte per le derivate. Allora la specificazione dei dati iniziali $q_1^0, \ldots, q_m^0, \pi_1^0, \ldots, \pi_n^0$ determina univocamente il moto del sistema. Ma con l'aiuto di questi dati iniziali, le formule (1) e (6) sono usate per specificare le arbitrarie velocità iniziali e le arbitrarie posizioni iniziali compatibili con i vincoli. Per questa ragione, la specificazione della posizione e delle velocità iniziali del sistema, tali che non contraddicano i vincoli finiti e differenziali, determina univocamente il moto di un sistema non olonomo.

Osservazione 1. Se in un caso particolare, per esempio, sono considerate n velocità generalizzate indipendenti $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ come pseudovelocità, allora per determinare le appropriate forze generalizzate $Q_1^*, \ldots, Q_n^*$ è necessario esprimere nella (7) $\delta q_{n+1}, \ldots, \delta q_m$ in funzione di $\delta q_1, \ldots, \delta q_n$:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{m} Q_i \, \delta q_i = \sum_{s=1}^{n} Q_s^* \, \delta q_s. \tag{25}$$

In questo caso l'energia delle accelerazioni U può essere data in forma delle funzioni $B (t, q_1, \ldots, q_m; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, \ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_n)$ e le equazioni di Appell prendono la forma

$$\frac{\partial U}{\partial \ddot{q}_s} = Q_s^* \quad (s = 1, \ldots, n). \tag{26}$$

Osservazione 2. In particolare le equazioni di Appell possono essere anche applicate a sistemi olonomi. In questo caso, tutte le

[1] Questo determinante può essere nullo in certi punti. Questi punti singolari non sono qui considerati. La disuguaglianza (23) è provata in modo analogo della disuguaglianza $\det (a_{ik})_{i, k=1}^{n} \neq 0$ di pagg. 47-48.

velocità $\dot{q}_i$ sono indipendenti, $Q_i = Q_i^*$ $(i = 1, \ldots, n)$, e le equazioni (26) sono semplicemente un'altra notazione delle equazioni di Lagrange del secondo tipo [1].

Esempio 1. Per mezzo delle equazioni di Appell determiniamo il moto del sistema descritto nel § 3 (vedi pag. 24). Ciò permette al lettore di paragonare i due metodi per trovare il moto di un sistema non olonomo, per

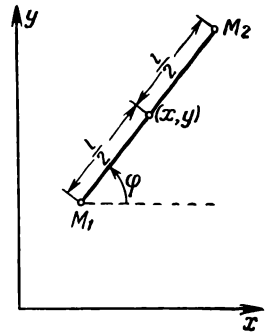


Fig. 28

mezzo dei moltiplicatori di Lagrange e con l'aiuto delle equazioni di Appell, e di convincersi dei vantaggi delle seconde. Come coordinate indipendenti consideriamo le coordinate x, y del centro della barra e l'angolo φ formato dal segmento M_1M_2 con l'asse orizzontale x (fig. 28). Allora

$$x_1 = x - \frac{l}{2}\cos\varphi, \qquad x_2 = x + \frac{l}{2}\cos\varphi,$$

$$y_1 = y - \frac{l}{2}\operatorname{sen}\varphi, \qquad y_2 = y + \frac{l}{2}\operatorname{sen}\varphi.$$

L'equazione del vincolo differenziale nelle nuove coordinate diventa

$$\frac{\dot{x}}{\cos\varphi} = \frac{\dot{y}}{\operatorname{sen}\varphi}.$$

Si può rapidamente verificare che l'energia delle accelerazioni U può essere espressa nel seguente modo:

$$U = \frac{1}{2}(\ddot{x}_1^2 + \ddot{y}_1^2 + \ddot{x}_2^2 + \ddot{y}_2^2) = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \frac{1}{4}l^2(\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4).$$

Introduciamo la pseudovelocità $\dot{\pi}$ assumendo

$$\dot{x} = \dot{\pi}\cos\varphi, \qquad \dot{y} = \dot{\pi}\operatorname{sen}\varphi,$$

allora

$$U = \ddot{\pi}^2 + \frac{1}{4}l^2\ddot{\varphi}^2 + \ldots,$$

[1] Ad ogni modo, applicate a sistemi olonomi, le equazioni di Appell nelle pseudocoordinate diventano forme delle equazioni del moto del tutto differenti.

dove i termini non scritti non contengono le accelerazioni. Ora determiniamo le forze generalizzate. Per fare ciò scriviamo

$$\delta A = \Pi\,\delta\pi + \Phi\,\delta\varphi = -2g\,\delta y = -2g \operatorname{sen}\varphi\,\delta\pi.$$

Da ciò

$$\Pi = -2g \operatorname{sen}\varphi, \qquad \Phi = 0.$$

Ora scriviamo le equazioni di Appell

$$\frac{\partial U}{\partial \ddot{\pi}} = \Pi, \qquad \frac{\partial U}{\partial \ddot{\varphi}} = \Phi.$$

In questo caso, queste equazioni non contengono le coordinate x, y ed hanno la forma

$$\ddot{\pi} = -g \operatorname{sen}\varphi, \qquad \ddot{\varphi} = 0.$$

Integrando otteniamo

$$\varphi = \alpha t + \beta,$$

$$\frac{d\dot{\pi}}{d\varphi} = \frac{1}{\alpha}\ddot{\pi} = -\frac{g}{\alpha^2}\operatorname{sen}\varphi, \qquad \dot{\pi} = \frac{g}{\alpha}\cos\varphi + \gamma.$$

Troviamo x e y

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{1}{\alpha}\dot{x} = \frac{1}{\alpha}\dot{\pi}\cos\varphi = \frac{g}{\alpha^2}\cos^2\varphi + \frac{\gamma}{\alpha}\cos\varphi,$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{1}{\alpha}\dot{y} = \frac{1}{\alpha}\dot{\pi}\operatorname{sen}\varphi = \frac{g}{\alpha^2}\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi + \frac{\gamma}{\alpha}\operatorname{sen}\varphi.$$

Da ciò si ottiene

$$x = \frac{g}{2\alpha^2}\varphi + \left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{g}{2\alpha^2}\cos\varphi\right)\operatorname{sen}\varphi + \delta,$$

$$y = -\left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{g}{2\alpha^2}\cos\varphi\right)\cos\varphi + \varepsilon.$$

Sostituendo $\alpha t + \beta$ a φ, otteniamo le equazioni finali del moto, che contengono cinque costanti arbitrarie α, β, γ, δ ed ε:

$$x = \frac{g}{2\alpha^2}(\alpha t+\beta) + \left[\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{g}{2\alpha^2}\cos(\alpha t+\beta)\right]\operatorname{sen}(\alpha t+\beta) + \delta,$$

$$y = -\left[\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{g}{2\alpha^2}\cos(\alpha t+\beta)\right]\cos(\alpha t+\beta) + \varepsilon, \quad \varphi = \alpha t + \beta.$$

Esempio 2. Mostriamo ora che è possibile ottenere le equazioni dinamiche di Eulero per un corpo rigido con un punto fisso O dalle equazioni di Appell.

Siano p, q, r le proiezioni della velocità angolare ω sugli assi principali d'inerzia $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$. Si sa che esse sono combinazioni lineari delle velocità generalizzate $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$, dove ψ, θ, φ sono gli angoli di Eulero (vedi pagg. 36-37)[1]. Possiamo perciò considerare p, q, r come tre pseudovelocità. Calcoliamo l'ener-

[1] Otteniamo le espressioni di p, q, r proiettando termine a termine sugli assi coordinati l'equazione vettoriale $\omega = \omega_\psi + \omega_\theta + \omega_\varphi$, dove $\omega_\psi = \dot{\psi}$, $\omega_\theta = \dot{\theta}$, $\omega_\varphi = \dot{\varphi}$.

gia delle accelerazioni [1]

$$2U = \int w^2\, dm = \int (\varepsilon \times r + \omega \times v)^2\, dm =$$

$$= \int (\varepsilon \times r)^2\, dm + 2 \int (\varepsilon \times r)\,(\omega \times v)\, dm + \ldots =$$

$$= \int (\varepsilon \times r)^2\, dm + 2\varepsilon \int [r \times (\omega \times v)]\, dm + \ldots =$$

$$= \int (\varepsilon \times r)^2\, dm + 2\varepsilon \left[\omega \times \int r \times v\, dm\right] + \ldots \qquad (27)$$

Si noti che $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\delta\omega}{dt} + \omega \times \omega = \frac{\delta\omega}{dt}$. Qui, $\frac{d}{dt}$ e $\frac{\delta}{dt}$ denotano rispettivamente la differenziazione in un sistema di assi stazionario ed in un sistema di assi arbitrario fissato ad un corpo [2]. Dunque, $\dot{p}$, $\dot{q}$ ed $\dot{r}$ sono le proiezioni dell'accelerazione angolare ε sugli assi $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$.

Allora, in analogia all'espressione dell'energia cinetica [3]

$$2T = \int (\omega \times r)^2\, dm = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$$

(A, B e C sono i momenti d'inerzia rispetto agli assi principali d'inerzia $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$), possiamo scrivere

$$\int (\varepsilon \times r)^2\, dm = A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{r}^2.$$

D'altra parte, il momento cinetico $G = \int r \times v\, dm$ ha componenti Ap, Bq, Cr. Per questa ragione, otteniamo finalmente la seguente espressione per $2U$:

$$2U = A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{r}^2 + 2\,[(C-B)\,qr\dot{p} + (A-C)\,rp\dot{q} + (B-A)\,pq\dot{r}] + \ldots$$

D'altra parte, il lavoro elementare delle forze esterne è dato da

$$\delta A = L_o \omega\, dt = L_\xi p\, dt + L_\eta q\, dt + L_\zeta r\, dt.$$

Dunque, le equazioni di Appell danno direttamente le equazioni di Eulero

$$A\frac{dp}{dt} + (C-B)\,qr = L_\xi,$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A-C)\,rp = L_\eta,$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B-A)\,pq = L_\zeta.$$

---

[1] Qui ci avvantaggiamo dell'identità familiare

$$r \times (\omega \times v) + \omega \times (v \times r) + v \times (r \times \omega) = 0.$$

L'ultimo termine a sinistra è nullo poiché $v = \omega \times r$. I termini non scritti nella formula (27) non contengono l'accelerazione angolare ε.

[2] Vedi, per esempio, L.G. Lojtsjanskij e A.I.Lurje, *Corso di meccanica teorica*, 1954, vol. I, § 73 (ed. russa).

[3] Vedi G.K. Suslov, *Meccanica teorica*, Mosca-Leningrado, 1944, § 259 (ed. russa).

II. Equazioni del moto in un campo potenziale

§ 11. *Equazioni di Lagrange per forze potenziali. Potenziale generalizzato. Sistemi non naturali*

Siano le forze generalizzate Q_i potenziali, cioè esista una forza potenziale (energia potenziale) $\Pi = \Pi(t, q_i)$ (vedi § 8) e

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Allora le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

sono date nella forma [1]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

dove

$$L = T - \Pi. \tag{3}$$

La funzione L è detta *funzione lagrangiana* o *potenziale cinetico*. Il potenziale cinetico L, come l'energia cinetica T, è una funzione quadratica delle velocità generalizzate

$$L = L_2 + L_1 + L_0, \tag{4}$$

dove

$$L_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,\,k=1}^{n} c_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k, \quad L_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i\dot{q}_i, \quad L_0 = c_0. \tag{4'}$$

Qui i coefficienti c_{ik}, c_i, c_0 sono funzioni delle coordinate $q_1, \ldots, q_n$ e del tempo t ($i, k = 1, \ldots, n$). Paragonando la formula (3) con la formula (5) di pag. 46 si ottiene

$$L_2 = T_2, \; L_1 = T_1, \; L_0 = T_0 - \Pi. \tag{5}$$

[1] Poiché l'energia potenziale Π non dipende dalle velocità generalizzate ed $L = T - \Pi$, segue che $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ e $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Si osservi che quando le forze effettive $\boldsymbol{F}_\nu = X_\nu \boldsymbol{i} + Y_\nu \boldsymbol{j} + Z_\nu \boldsymbol{k}$ ($\nu = 1, \ldots, N$) agenti sulle particelle hanno un potenziale $\Pi(t, x_\nu, y_\nu, z_\nu)$ espresso nelle coordinate cartesiane x_ν, y_ν, z_ν ($\nu = 1, \ldots, N$), cioè

$$X_\nu = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_\nu}, \quad Y_\nu = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_\nu}, \quad Z_\nu = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_\nu} \quad (\nu = 1, \ldots, N),$$

queste forze hanno anche un potenziale espresso nelle coordinate indipendenti q_i ($i = 1, \ldots, n$) (l'asserzione opposta nel caso generale è falsa!) e questo potenziale è lo stesso potenziale Π, solamente espresso in funzione delle coordinate $q_1, \ldots, q_n$ e del tempo t. Infatti

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \, \delta q_i = \sum_{\nu=1}^{N} (X_\nu \, \delta x_\nu + Y_\nu \, \delta y_\nu + Z_\nu \, \delta z_\nu) = -\delta \Pi = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \delta q_i,$$

da cui seguono le equazioni (1).

Consideriamo ora il caso in cui al posto del potenziale ordinario $\Pi(t, q_k)$ esista un *potenziale generalizzato* $V(t, q_k, \dot{q}_k)$, in funzione del quale siano espresse le forze generalizzate Q_i per mezzo delle formule

$$Q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

Allora le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

saranno scritte di nuovo nella forma (2), dove ora abbiamo

$$L = T - V. \tag{7}$$

Dalle formule (6) segue che

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_i \, \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + (**) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{8}$$

dove (**) esprime la somma di tutti i termini che non contengono le accelerazioni generalizzate $\ddot{q}_k$ ($k = 1, \ldots, n$).

Poiché in meccanica consideriamo solo il caso in cui le forze generalizzate Q_i non sono esplicitamente dipendenti dalle accelerazioni generalizzate, bensì dipendono solamente dal tempo, dalle coordinate e dalle velocità generalizzate

$$Q_i = Q_i(t, q_k, \dot{q}_k) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{9}$$

allora in accordo con le formule (8) segue che tutte le derivate parziali del secondo ordine di V rispetto alle velocità generalizzate debbono essere identicamente nulle, cioè il *potenziale gene-*

ralizzato V dipende linearmente dalle velocità generalizzate

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Pi_i \dot{q}_i + \Pi = V_1 + \Pi, \tag{10}$$

dove Π_i $(i = 1, \ldots, n)$ e Π sono funzioni delle coordinate $q_1, \ldots, q_n$ e del tempo t. Ma allora, in accordo con la (7), L sarà di nuovo una funzione quadratica delle velocità $\dot{q}_i$ ed al posto delle equazioni (5) avremo [1]

$$L_2 = T_2, \quad L_1 = T_1 - V_1, \quad L_0 = T_0 - \Pi. \tag{11}$$

Sostituendo l'espressione (10) per V nella formula (6) otteniamo

$$Q_i = \frac{d\Pi_i}{dt} - \frac{\partial}{\partial q_i}\left[\sum_{k=1}^{n} \Pi_k \dot{q}_k + \Pi\right] =$$

$$= -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \Pi_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \Pi_k}{\partial q_i}\right) \dot{q}_k + \frac{\partial \Pi_i}{\partial t}. \tag{12}$$

Le formule (12) mostrano che quando la parte lineare V_1 del potenziale generalizzato non dipende esplicitamente dal tempo $t\left[\frac{\partial \Pi_i}{\partial t} = 0 \ (i = 1, \ldots, n)\right]$, *le forze generalizzate* Q_i *sono costituite dalle forze potenziali* $-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ *e dalle forze giroscopiche*

$$\tilde{Q}_i = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} \dot{q}_k \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{13}$$

dove

$$\gamma_{ik} = -\gamma_{ki} = \frac{\partial \Pi_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \Pi_k}{\partial q_i} \quad (i, k = 1, \ldots, n). \tag{13'}$$

L'importanza di considerare il potenziale generalizzato è evidente nell'esempio che segue.

Esempio: Una carica elettrica puntiforme in un campo elettromagnetico è sottoposta alla *forza di Lorentz*

$$\boldsymbol{F} = e\left[\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H}\right], \tag{14}$$

dove $\boldsymbol{v}$ è la velocità della carica, e è la sua carica, c è la velocità della luce, ed $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{H}$ sono le intensità dei campi elettrico e magnetico. I vettori $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{H}$ sono espressi in funzione del potenziale scalare φ e del potenziale vettoriale

[1] I coefficienti nelle espressioni di L e T sono correlati. Infatti per il potenziale ordinario $c_i = a_i$, mentre per il potenziale generalizzato $c_i = a_i - \Pi_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. In entrambi i casi invece $c_{ik} = a_{ik}$ $(i, k = 1, \ldots, n)$, $c_0 = a_0 - \Pi$, ed $L_2 = T_2$ è una forma quadratica definita positiva.

$\boldsymbol{A}$ dalle seguenti formule [1]:

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{H} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}. \tag{15}$$

Troviamo il potenziale generalizzato V per la forza di Lorentz $\boldsymbol{F}$.

Dalle formule (14) e (15) abbiamo

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= -e\operatorname{grad}\varphi - \frac{e}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \frac{e}{c}(\boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{A}) = \\ &= -e\operatorname{grad}\varphi - \frac{e}{c}\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} + \frac{e}{c}[(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{A}] = \\ &= -e\operatorname{grad}\varphi - \frac{e}{c}\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} + \frac{e}{c}\operatorname{grad}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}),\end{aligned} \tag{16}$$

dove la velocità $\boldsymbol{v}$ nell'espressione grad $(\boldsymbol{v}\boldsymbol{A})$ è considerata un vettore indipendente dal punto del campo [2].

Dunque, scegliendo come coordinate indipendenti le coordinate cartesiane del punto x, y, z e considerando la relazione

$$V = e\varphi - \frac{e}{c}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}), \tag{17}$$

cioè

$$V = e\varphi - \frac{e}{c}(\dot{x}A_x + \dot{y}Ay + \dot{z}Az),$$

abbiamo

$$F_x = -\frac{e}{c}\frac{dA_x}{dt} - \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Si trovano formule simili per F_y e F_z. Così *il potenziale generalizzato della forza di Lorentz* (14) *è determinato dalla formula* (17). Per la funzione lagrangiana L abbiamo l'espressione

$$L = T - V = \frac{1}{2}mv^2 - d\varphi + \frac{e}{c}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}). \tag{18}$$

---

[1] Vedi, per esempio, L.D. Landau e E.M. Lifšits, *Teoria dei campi*, Editori Riuniti Edizioni Mir, 1976.

[2] Qui per l'espressione $(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{A} = v_x\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x} + v_y\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial y} + v_z\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial z}$ utilizziamo la familiare formula di analisi vettoriale

$$(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \operatorname{grad}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}),$$

in cui $\boldsymbol{v}$ è considerato un vettore costante. Si dimostra rapidamente la validità di questa formula paragonando le proiezioni dei membri destro e sinistro della suddetta equazione sugli assi x, y, z. Infatti per l'asse x, vale

$$v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial A_x}{\partial z} + v_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) -$$

$$-v_z\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) = v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}).$$

Formule analoghe valgono per le proiezioni sugli assi y e z.

I sistemi classici in cui le forze hanno potenziale ordinario $\Pi(t, q_i)$ o potenziale generalizzato $V(t, q_i, \dot{q}_i)$ sono detti *naturali*. Per tali sistemi la funzione lagrangiana L è una funzione quadratica delle velocità generalizzate, cioè è data dall'espressione (4), dove L_2 è una forma quadratica definita positiva delle velocità generalizzate.

Come esempio di sistema non naturale possiamo esaminare, nella teoria relativistica, il moto di una particella in assenza di un campo di forze. Il moto di questa particella è determinato dalle equazioni di Lagrange

$$L = -mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2},$$

dove $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ e c è la velocità della luce. In questo caso, L non è più una funzione quadratica delle velocità $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.

Se nell'espressione della funzione L sviluppiamo $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$ in serie di potenze di $\frac{v}{c}$ e trascuriamo tutti i termini dal secondo ordine in poi, cioè poniamo $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$, allora abbiamo l'espressione «classica» della funzione lagrangiana per una particella isolata

$$L = \frac{1}{2} mv^2 + \text{cost.}$$

In questo capitolo e nei capitoli seguenti, limitiamo la nostra discussione a sistemi di tipo generale [1], il cui moto è determinato dalle equazioni di Lagrange (2) con una funzione arbitraria $L = L(t, q_i, \dot{q}_i)$. Assumeremo solamente che l'hessiano della funzione L, rispetto alle velocità generalizzate, non sia identicamente nullo [2]

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \, \partial \dot{q}_k}\right)_{i,\, k=1}^{n} \not\equiv 0. \tag{19}$$

In forma estesa si può scrivere l'equazione (2) come

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \, \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + (**) = 0, \tag{20}$$

---

[1] Le proposizioni di questo tipo, che sono valide soltanto per sistemi naturali, saranno specificate.

[2] Per sistemi naturali $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \, \partial \dot{q}_k} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \, \partial \dot{q}_k} = a_{ik}$ $(i, \quad k = 1, \ \ldots, \ n)$ e quindi, da quanto dimostrato nel § 7 (pagg. 47-48), la disuguaglianza (19) è ancora vera.

dove (**) denota la somma dei termini che non contengono le accelerazioni generalizzate $\ddot{q}_i$ ($i = 1, \ldots, n$). In quanto il determinante del sistema delle equazioni lineari (20) (in $\ddot{q}_k$) è diverso da zero (vedi disuguaglianza (19)), segue che il sistema (20) è risolvibile nelle accelerazioni generalizzate e scritto nella forma

$$\ddot{q}_i = G_i(t, q_k, \dot{q}_k) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Perciò la conclusione tratta nel § 7 come l'unica determinazione del moto di un sistema, specificando i dati iniziali q_i^0, $\dot{q}_i^0$ ($i = 1, \ldots, n$), è valida non solo per sistemi naturali, ma anche per sistemi di tipo generale.

§ 12. *Equazioni canoniche di Hamilton*

Lagrange mostrò come le equazioni differenziali del moto di un sistema possano essere scritte se si conosce il potenziale cinetico (la funzione lagrangiana) $L = L(t, q_i, \dot{q}_i)$.

Chiameremo le variabili t, q_i, $\dot{q}_i$ ($i = 1, \ldots, n$), in funzione delle quali è espressa la funzione lagrangiana, *variabili lagrangiane*. Il sistema di queste variabili caratterizza l'istante di tempo e il corrispondente stato del sistema, cioè la posizione del sistema e le velocità delle sue particelle. Come è già stato notato alla fine del paragrafo precedente, la specificazione della funzione lagrangiana e dello stato iniziale determina univocamente il moto del sistema.

Come variabili di base che caratterizzano lo stato del sistema, Hamilton propose le quantità t, q_i, p_i ($i = 1, \ldots, n$), dove p_i ($i = 1, \ldots, n$) sono i *momenti generalizzati* definiti dall'uguaglianza

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Chiameremo le variabili t, q_i, p_i ($i = 1, \ldots, n$) *variabili d Hamilton.*

Poiché lo jacobiano del secondo membro delle equazioni (1) rispetto alle variabili $\dot{q}_i$ è l'hessiano (diverso da zero) della funzione L (vedi la condizione (19) di pag. 71), segue che le equazioni (1) possono essere risolte in $\dot{q}_i$ ($i = 1, \ldots, n$):

$$\dot{q}_i = \Phi_i(t, q_k, p_k) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Così, *le variabili di Hamilton possono essere espresse in funzione delle variabili di Lagrange e viceversa*, e lo stato del sistema può essere descritto sia come un sistema di valori delle variabili

lagrangiane, che come un sistema di valori delle variabili hamiltoniane.

Nel caso di un sistema naturale, L è una funzione quadratica (vedi pagg. 67-69) delle velocità generalizzate e, in accordo con le equazioni (1), i momenti generalizzati sono espressi linearmente in funzione delle velocità generalizzate:

$$p_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_k + c_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Risolvendo questo insieme di equazioni lineari in $\dot{q}_i$ [1], otteniamo nuovamente delle espressioni lineari per $\dot{q}_i$:

$$\dot{q}_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}p_k + b_i \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{4}$$

dove b_{ik} e b_i sono funzioni di t, $q_1, \ldots, q_n$.

Se in un sistema naturale le forze Q_i $(i = 1, \ldots, n)$ hanno un potenziale ordinario $\Pi(t, q_i)$, dall'equazione $L = T - \Pi$ segue che [2]

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}. \tag{5}$$

Si noti che ogni funzione delle variabili lagrangiane

$$F = F(t, q_i, \dot{q}_i)$$

dopo la sostituzione delle espressioni (2) e (4) al posto delle velocità generalizzate $\dot{q}_i$, si converte in una funzione $\widehat{F}(t, q_i, p_i)$ delle variabili hamiltoniane. Chiameremo la funzione $\widehat{F}(t, q_i, p_i)$ *espressione associata* della funzione $F(t, q_i, \dot{q}_i)$.

Esempio. Per una particella libera le coordinate cartesiane x, y, z sono indipendenti, e nel campo potenziale $\Pi = \Pi(t, x, y, z)$ la funzione lagrangiana ha la forma

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \Pi(t, x, y, z).$$

Inoltre alle coordinate cartesiane corrispondono i momenti

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}, \quad p_z = m\dot{z}. \tag{6}$$

---

[1] Come stabilito nel § 7, $\det(a_{ik})_{i,k=1}^{n} \neq 0$.

[2] Le formule (5) non sono valide per quelle forze che hanno un potenziale generalizzato. In questo caso (vedi le equazioni (7) e (10) di pagg. 68-69)

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \Pi_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Se da queste determiniamo $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ e inseriamo le espressioni ottenute in L, avremo l'espressione associata per L

$$\widehat{L} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \Pi(t, x, y, z). \tag{7}$$

Se al posto di $\Pi(t, x, y, z)$ abbiamo il potenziale generalizzato

$$V = \Pi_1 \dot{x} + \Pi_2 \dot{y} + \Pi_3 \dot{z} + \Pi,$$

dove Π_1, Π_2, Π_3 e Π sono funzioni di t, x, y, z, allora dall'equazione

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \Pi_1 \dot{x} - \Pi_2 \dot{y} - \Pi_3 \dot{z} - \Pi$$

troviamo

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \Pi_1, \quad p_y = m\dot{y} - \Pi_2, \quad p_z = m\dot{z} - \Pi_3, \tag{6'}$$

e l'espressione associata $\widehat{L}$ ha la forma

$$\widehat{L} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{1}{2m}(\Pi_1^2 + \Pi_2^2 + \Pi_3^2) - \Pi. \tag{7'}$$

Hamilton introdusse la funzione $H(t, q_i, p_i)$ definita dall'equazione

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{\widehat{q}}_i - \widehat{L}, \tag{8}$$

e dimostrò che, con l'aiuto di questa funzione, le equazioni del moto possono essere scritte nella forma del seguente sistema di $2n$ equazioni differenziali ordinarie del primo ordine:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Queste equazioni sono chiamate equazioni *canoniche* o equazioni *di Hamilton* [1]. La funzione $H(t, q_i, p_i)$ definita dall'equazione (8) è chiamata *funzione hamiltoniana*.

La derivazione delle equazioni canoniche di Hamilton si fonda sul seguente teorema matematico.

Teorema di Donkin [2]. *Sia data una certa funzione* $X(x_1, \ldots, x_n)$, *il cui hessiano è diverso da zero*:

$$\det\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x_i \, \partial x_k}\right)_{i,k=1}^{n} \neq 0. \tag{10}$$

Ci sia inoltre una trasformazione delle variabili «generata» dalla funzione $X(x_1, \ldots, x_n)$:

$$y_i = \frac{\partial X}{\partial x_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{11}$$

[1] Queste equazioni furono per la prima volta ottenute in forma generale da W.R. Hamilton nel 1834.

[2] Philosoph. Trans., 1854. Il passaggio dalle variabili x_i alle variabili y_i $(i = 1, \ldots, n)$, che è trattato nel teorema di Donkin, è frequentemente chiamato *trasformazione di Legendre*.

Allora esiste anche una trasformazione, l'inversa della trasformazione (11), *che è analogamente generata da una certa funzione* $Y(y_1, \ldots, y_n)$:

$$x_i = \frac{\partial Y}{\partial y_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{12}$$

Qui la funzione Y generatrice della trasformazione inversa è legata alla funzione X generatrice della trasformazione diretta dalla formula [1]

$$Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - X. \tag{13}$$

Se la funzione X contiene i parametri $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, *cioè* $X = X(x_1, \ldots, x_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, *allora anche Y contiene questi parametri, cioè* $Y = Y(y_1, \ldots, y_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ *e*

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha_j} = -\frac{\partial X}{\partial \alpha_j} \quad (j = 1, \ldots, m). \tag{14}$$

Dimostrazione. L'hessiano della funzione X coincide con lo jacobiano del membro destro delle equazioni (11). Per questa ragione la condizione (10) mostra che usando le equazioni (11) è possibile esprimere le variabili $x_1, \ldots, x_n$ in funzione di $y_1, \ldots, y_n$

$$x_i = f_i(y_1, \ldots, y_n) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{15}$$

Si può definire la funzione $Y(y_1, \ldots, y_n)$ dalla formula (13), in cui le variabili x_i sono sostituite dalle espressioni (15). Allora

$$\frac{\partial Y}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - X\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} y_k + x_i - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_i}.$$

Ma, per l'equazione (11), le due sommatorie del membro destro di questa equazione si annullano e dunque, le formule (12) sono vere.

Ora si supponga che la funzione X contenga i parametri $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ oltre alle variabili $x_1, \ldots, x_n$. Allora questi parametri compaiono nella trasformazione diretta (11) e, conseguentemente, in quella inversa, cioè

$$x_i = f_i(y_1, \ldots, y_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

---

[1] Si assume che nel membro sinistro della (13) tutte le x_i siano espresse in funzione delle y_i, tali che sia $Y = Y(y_1, \ldots, y_n)$.

La funzione Y è determinata dall'equazione (13) in cui le x_i sono sostituite dalle f_i $(y_1, \ldots, y_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e così [1]

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - X\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} y_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial X}{\partial \alpha_j} =$$

$$= -\frac{\partial X}{\partial \alpha_j} \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Questo completa la dimostrazione del teorema di Donkin.

Utilizziamo il teorema di Donkin per effettuare il passaggio dalle variabili lagrangiane a quelle hamiltoniane sostituendo nel teorema la funzione X con L, le variabili $x_1, \ldots, x_n$ con $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$, i parametri $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ con $q_1, \ldots, q_n$, t, le variabili $y_1, \ldots, y_n$ con $p_1, \ldots, p_n$ ed infine (tenendo conto della nota 1 di pag. 75), la funzione $Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - X$ con $H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L$. Dunque, per il teorema di Donkin (l'hessiano della funzione L rispetto alle $\dot{q}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ non è nullo!) segue dalla formula (1) che

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{16}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{17}$$

Le equazioni (16) e (17) sono delle identità che derivano dalla relazione (1) tra le velocità generalizzate e i momenti generalizzati. Ma le equazioni di Lagrange possono, in virtù della (1), essere scritte come segue:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{18}$$

Queste equazioni insieme alle equazioni (16) ci conducono alle equazioni canoniche di Hamilton

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{19}$$

Oltre alle equazioni di Hamilton otteniamo l'identità (17) che sarà utilizzata in seguito.

Dalle equazioni (19) segue l'identità

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}\right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{20}$$

---

[1] Nel calcolo della derivata $\frac{\partial Y}{\partial \alpha_j}$ le quantità $y_1, \ldots, y_n$ sono considerate costanti.

Chiameremo un sistema *generalizzato conservativo* se la funzione hamiltoniana H non dipende esplicitamente da t, cioè se

$$H = H(q_i, p_i).$$

In questo caso $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$[1] e, conseguentemente, in virtù dell'identità (20), $\frac{dH}{dt} = 0$, cioè *quando il sistema è in moto*

$$H(q_i, p_i) = \text{cost} = h, \tag{21}$$

dove h è una costante arbitraria. Chiameremo la funzione H *energia totale generalizzata*, e la relazione (21), che non contiene $\dot{q}$ o $\dot{p}$ e include una costante arbitraria h, *integrale generalizzato dell'energia*.

Spieghiamo questa terminologia esaminando un sistema naturale. In tal caso L è una funzione quadratica (vedi l'equazione (4), § 11):

$$L = L_2 + L_1 + L_0$$

e

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q} - \widehat{L} = \sum_{i=1}^{n} \widehat{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i} - \widehat{L} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \widehat{\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i} + \sum_{i=1}^{n} \widehat{\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i} - \widehat{L}_2 - \widehat{L}_1 - L_0.$$

Ma per il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee[2],

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2L_2, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = L_1. \tag{22}$$

Dunque, per un arbitrario sistema naturale otteniamo finalmente

$$H = \widehat{L}_2 - L_0. \tag{23}$$

Sia $T = T_2 + T_1 + T_0$. Se le forze hanno potenziale ordinario $\Pi = \Pi(t, q_i)$ o potenziale generalizzato $V = V_1 + \Pi$, allora $L_2 = T_2$, $L_0 = T_0 - \Pi$, e dunque

$$H = \widehat{T}_2 - T_0 + \Pi. \tag{24}$$

Se il sistema è scleronomo, allora $T = T_2$, $T_0 = 0$ e dunque

$$H = \widehat{T} + \Pi. \tag{25}$$

---

[1] Dalla (17) segue anche che $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ per un sistema generalizzato conservativo, cioè t non appare esplicitamente anche nella funzione lagrangiana L.

[2] Vedi nota di pag. 51.

Così, *per un sistema naturale scleronomo la funzione hamiltoniana H è l'energia totale*[1] *espressa in funzione delle variabili hamiltoniane.*

Ora si consideri un sistema conservativo, cioè un sistema naturale scleronomo olonomo con una forza potenziale ordinaria che non dipende esplicitamente dal tempo.

In questo caso il tempo t non compare esplicitamente nell'espressione (25) per l'energia totale H e dunque, in accordo con la (21), si ottiene la legge di conservazione dell'energia

$$T + \Pi = h. \tag{26}$$

Un sistema conservativo è un caso particolare di un sistema conservativo generalizzato, e in questo caso particolare l'integrale generalizzato dell'energia diventa un integrale ordinario.

Se il sistema è scleronomo e le forze hanno un potenziale generalizzato $V = V_1 + \Pi$, in cui Π non dipende esplicitamente dal tempo t $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0\right)$, allora la funzione H è nuovamente determinata dalla formula (25) e non dipende esplicitamente da t. Per questa ragione, in tal caso anche il sistema è generalizzato conservativo, e l'integrale dell'energia (26) resta valido [2].

Esempio. Una sbarra posta orizzontalmente gira intorno ad un asse verticale, e un peso di massa m è in moto lungo la sbarra. La forza che agisce sul peso ha potenziale $\Pi(r)$, dove r è la distanza del peso dall'asse di rotazione.

Denotiamo con φ l'angolo di rotazione della sbarra e con $I = md^2$ il suo momento d'inerzia rispetto all'asse verticale di rotazione. Allora r e φ sono coordinate indipendenti del sistema e

$$T = \frac{1}{2} I\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2} m[\dot{r}^2 + (r^2 + d^2)\dot{\varphi}^2].$$

Da questa

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m(r^2 + d^2)\dot{\varphi}.$$

Poiché il sistema è conservativo, segue che

$$H = T + \Pi = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2 + d^2}\right) + \Pi(r).$$

Le equazioni canoniche in questo caso hanno la forma

$$\frac{dr}{dt} = \frac{p_r}{m}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{p_\varphi}{m(r^2 + d^2)},$$

$$\frac{dp_r}{dt} = \frac{rp_\varphi^2}{m(r^2 + d^2)^2} - \Pi'(r), \quad \frac{dp_\varphi}{dt} = 0,$$

[1] Dato un potenziale generalizzato $V = V_1 + \Pi$, continuiamo a chiamare la quantità $T + \Pi$ (e non $T + V$) energia totale.

[2] Vedi nota 1 di pag. 78.

e l'integrale dell'energia è scritto come

$$p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2+d^2} + 2m\Pi(r) = h_1 \quad (h_1 = 2mh).$$

§ 13. *Equazioni di Routh*

Come variabili di base caratterizzanti lo stato di un sistema ad un istante t, Routh propose di considerare parte delle variabili lagrangiane e parte delle variabili hamiltoniane. Le *variabili di Routh* sono le quantità

$$t,\ q_i,\ q_\alpha,\ \dot{q}_i,\ p_\alpha \quad (i = 1, \ldots, m;\ \alpha = m+1, \ldots, n), \tag{1}$$

dove m è un numero arbitrario fissato, minore di n.

Per passare dalle variabili lagrangiane a queste variabili, dobbiamo esprimere tutte le $\dot{q}_\alpha$ in funzione delle p_α ($\alpha = m+1, \ldots, n$), utilizzando le relazioni

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (\alpha = m+1, \ldots, n). \tag{2}$$

Si suppone che l'hessiano della funzione L delle velocità generalizzate $\dot{q}_\alpha$ (il « piccolo hessiano ») non sia nullo [1]:

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha\, \partial \dot{q}_\beta}\right)_{\alpha,\,\beta=m+1}^{n} \neq 0. \tag{3}$$

Allora, applicando il teorema di Donkin, che è stato dimostrato nel paragrafo precedente, otteniamo una trasformazione che è inversa rispetto alla trasformazione (2), cioè

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial R}{\partial p_\alpha} \quad (\alpha = m+1, \ldots, n), \tag{4}$$

dove $R = R(t, q_i, q_\alpha, \dot{q}_i, p_\alpha)$ è la *funzione di Routh* definita dall'equazione

$$R = \sum_{\alpha=m+1}^{n} p_\alpha \dot{q}_\alpha - \widehat{L}; \tag{5}$$

[1] Nel caso generale questa disuguaglianza non deriva dalla disuguaglianza (19) di pag. 71 ma è una condizione ausiliaria.

Ora per un sistema naturale, la disuguaglianza (3) deriva dal fatto che $L_2 = \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{n} a_{rs}\dot{q}_r\dot{q}_s$ è una forma quadratica definita positiva. In questo caso, il minore principale composto dai coefficienti della forma quadratica

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha\, \partial \dot{q}_\beta}\right)_{\alpha,\beta=m+1}^{n} = \det\left(a_{\alpha\beta}\right)_{\alpha,\beta=m+1}^{n}$$

deve essere positivo.

il segno $\widehat{\ }$ qui significa che tutte le $\dot{q}_\alpha$ sono espresse in funzioni di p_α.

Le variabili t, q_i, q_α, $\dot{q}_i$ ($i = 1, \ldots, m$; $\alpha = m+1, \ldots, n$) sono ora considerate come parametri e per questa ragione, in virtù dello stesso teorema di Donkin,

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i=1, \ldots, m), \tag{6}$$

$$\frac{\partial R}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha=m+1, \ldots, n), \tag{7}$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{8}$$

Le equazioni di Lagrange delle coordinate q_i possono essere riscritte, in accordo alle equazioni (6), come

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, \ldots, m). \tag{9}$$

Le equazioni di Lagrange delle coordinate q_α

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha=m+1, \ldots, n),$$

insieme alle formule (4) e (7), danno

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial R}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha=m+1, \ldots, n). \tag{10}$$

Le equazioni (9) e (10)

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \dfrac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, \ldots, m), \\ \dfrac{dq_\alpha}{dt} = \dfrac{\partial R}{\partial p_\alpha}, \quad \dfrac{dp_\alpha}{dt} = -\dfrac{\partial R}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha=m+1, \ldots, n) \end{cases} \tag{11}$$

formano un insieme di *equazioni di Routh*. Questo insieme è composto da m equazioni differenziali del secondo ordine del tipo lagrangiano e da $2(n-m)$ equazioni differenziali del primo ordine del tipo hamiltoniano; le funzioni di Routh nelle prime equazioni giocano il ruolo della funzione lagrangiana, mentre nelle ultime equazioni giocano il ruolo della funzione hamiltoniana [1].

[1] Se desideriamo mantenere la relazione tra i momenti generalizzati e la funzione lagrangiana, dobbiamo assumere che nelle prime equazioni della (11) il ruolo della funzione lagrangiana sia giocato dalla funzione $-R$, poiché, in accordo alla (6),

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial(-R)}{\partial \dot{q}_i} \quad (i=1, \ldots, m).$$

§ 14. *Coordinate cicliche*

Le coordinate q_α sono dette *cicliche* (ignorabili) se non compaiono esplicitamente nella funzione lagrangiana L, cioè se $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$.

Derivando le equazioni di Hamilton e Routh vengono stabilite le seguenti uguaglianze:

$$-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial R}{\partial q_\alpha}. \tag{1}$$

Da queste equazioni deriva il fatto che le derivate parziali $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$, $\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$ e $\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}$ possono annullarsi solo simultaneamente. Per questa ragione, le coordinate cicliche possono anche essere definite come delle coordinate che non compaiono esplicitamente nella funzione hamiltoniana H o nella funzione di Routh R. Tutte queste definizioni sono equivalenti.

Il momento generalizzato, che corrisponde alla coordinata ciclica q_α, si mantiene costante durante il moto. Infatti, dalle equazioni canoniche deriva che

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = 0,$$

cioè $p_\alpha = \text{cost} = c_\alpha$.

Ora si supponga che si abbiano $r = n - m$ coordinate cicliche q_α ($\alpha = m + 1, \ldots, n$). Le coordinate cicliche q_α non compaiono esplicitamente in H, mentre i momenti p_α corrispondenti a queste coordinate possono essere sostituiti dalle costanti c_α. Allora [1]

$$H = H(t, q_i, p_i, c_\alpha). \tag{2}$$

Possiamo scrivere le equazioni canoniche per le coordinate non cicliche

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{3}$$

Dalla struttura (2) della funzione H segue che le equazioni (3) formano un sistema di $2m$ equazioni differenziali del primo ordine in $2m$ funzioni incognite q_i, p_i ($i = 1, \ldots, m$). Integrando questo sistema troviamo

$$\begin{cases} q_i = \varphi_i(t, c_\alpha, c_i, c_i'), \\ p_i = \psi_i(t, c_\alpha, c_i, c_i') \end{cases} \quad (i = 1, \ldots, m), \tag{4}$$

dove c_i, c_i' ($i = 1, \ldots, m$) sono $2m$ nuove costanti arbitrarie. Dalla sostituzione delle espressioni (4) in H si possono determi-

[1] L'indice i assume i valori da 1 a m, mentre l'indice α i valori $m + 1, \ldots, n$.

nare le q_α dalle equazioni

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial c_\alpha} \quad (\alpha = m+1, \ldots, n) \tag{5}$$

dal calcolo

$$q_\alpha = \int \frac{\partial H}{\partial c_\alpha} dt + c'_\alpha \quad (\alpha = m+1, \ldots, n). \tag{6}$$

Così, essenzialmente l'intero problema si riduce ad integrare il sistema (3) il cui ordine, $2m$, è inferiore di $2r$ unità dell'ordine, $2n$, del sistema iniziale, dove $r = n - m$ è il numero delle coordinate cicliche, cioè *la presenza di r coordinate cicliche abbassa l'ordine del sistema di 2r unità.*

Il sistema di equazioni (3) è hamiltoniano. Dimostriamo che con l'aiuto delle equazioni di Routh è possibile ottenere un sistema autonomo [1] di m equazioni differenziali del secondo ordine del tipo lagrangiano. Infatti, sostituendo i momenti generalizzati p_α, che corrispondono alle coordinate cicliche q_α, con le costanti c_α ($\alpha = m + 1, \ldots, n$), possiamo scrivere la funzione di Routh come una funzione di t, q_i, $\dot{q}_i$ e c_α ($i = 1, \ldots, m$; $\alpha = m + 1, \ldots, n$):

$$R = R(t, q_i, \dot{q}_i, c_\alpha). \tag{7}$$

Allora le equazioni di Routh per le coordinate non cicliche

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{8}$$

formano il desiderato sistema autonomo, mentre le coordinate cicliche q_α sono determinate dalle equazioni di Routh appropriate (11) del precedente paragrafo mediante il calcolo

$$q_\alpha = \int \frac{\partial R}{\partial c_\alpha} dt + c'_\alpha. \tag{9}$$

Qui, tutte le prime q_i e $\dot{q}_i$ nella $\frac{\partial R}{\partial c_\alpha}$ sono sostituite dalle funzioni di $2m + 1$ variabili t, c_i e c'_i ($i = 1, \ldots, m$), che sono ottenute dall'integrazione del sistema (8).

Esempio. Nell'esempio considerato alla fine del § 12,

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + (r^2 + d^2)\dot{\varphi}^2] - \Pi(r),$$

φ è una coordinata ciclica, e

$$p_\varphi = m(r^2 + d^2)\dot{\varphi} = \text{cost} = c_\varphi.$$

---

[1] Qui, come sistema autonomo è considerato un sistema di equazioni differenziali che non contengono nessuna funzione incognita « superflua » che dovrebbe essere determinata prima dell'integrazione del dato sistema di equazioni.

Formiamo la funzione di Routh

$$R = p_\varphi \dot{\varphi} - \widehat{L} = \frac{1}{2} m [-\dot{r}^2 + (r^2 + d^2) \dot{\varphi}^2] + \Pi (r) =$$

$$= -\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2m} \frac{p_\varphi^2}{r^2 + d^2} + \Pi (r) =$$

$$= -\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{c_\varphi^2}{2m} \frac{1}{r^2 + d^2} + \Pi (r).$$

Per determinare il moto basta integrare un'equazione differenziale del secondo ordine

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial R}{\partial r} = 0,$$

che in forma estesa risulta

$$m \ddot{r} = \frac{c_\varphi^2}{m} \frac{r}{(r^2 + d^2)^2} - \Pi' (r).$$

Si osserverà che questa è un'equazione del moto relativo di un peso lungo una sbarra, poiché il termine destro contiene la forza centrifuga

$$\frac{c_\varphi^2}{m} \frac{r}{(r^2 + d^2)^2} = m r \dot{\varphi}^2 \qquad (c_\varphi = p_\varphi).$$

Le coordinate cicliche sono qualche volta chiamate coordinate *ignorabili* o « *cinosteniche* ». Questo nome deriva dal fatto che nell'integrazione del sistema di equazioni (3) e (8) ignoriamo l'esistenza delle coordinate cicliche, considerando le p_α parametri costanti.

Nell'esempio che abbiamo esaminato, ignorando le coordinate cicliche siamo stati portati ad ignorare il moto di rotazione della sbarra ed abbiamo ottenuto un'equazione differenziale per il moto relativo lungo la sbarra.

Il nome stesso « coordinate cicliche » è associato al fatto che in molti problemi di meccanica l'angolo φ, che descrive il moto in traiettorie chiuse (cicli), non compare esplicitamente nell'espressione di L e per questa ragione è una coordinata ciclica.

Osserviamo una certa analogia tra un sistema olonomo con una coordinata ciclica e un sistema conservativo generalizzato. Per il primo sistema si ha $\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = 0$, per il secondo $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$. Per il primo, abbiamo che l'integrale $p_\alpha = \text{cost}$, per il secondo, $H = \text{cost}$. I fondamenti di questa analogia verranno rilevati più avanti, quando considereremo il principale invariante integrale della meccanica.

Un più profondo studio del moto dei sistemi con coordinate cicliche sarà affrontato nel capitolo VII.

§ 15. *Parentesi di Poisson*

In questo paragrafo consideriamo alcune proprietà degli integrali di un sistema hamiltoniano di equazioni del moto.

Una data funzione $f(t, q_i, p_i)$ è detta *integrale* delle equazioni del moto

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

se, per qualunque moto del sistema dato, questa funzione assume un valore costante c [1]:

$$f(t, q_i, p_i) = c. \tag{2}$$

Qualche volta la relazione (2) stessa è chiamata integrale.

Per un sistema conservativo generalizzato la funzione $H(q_i, p_i)$ è l'integrale. Se le q_α sono coordinate cicliche, allora p_α è l'integrale.

Ovviamente, se le funzioni $f_1, \ldots, f_l$ sono gli integrali delle equazioni del moto, allora una funzione arbitraria di questi integrali

$$F(f_1, \ldots, f_l)$$

è anch'essa un integrale. D'ora in poi ci interesseremo solo degli integrali indipendenti.

Se il sistema « completo » di integrali, formato di $2n$ integrali indipendenti $f_1, \ldots, f_{2n}$ (n è il numero dei gradi di libertà del sistema) è conosciuto, allora, risolvendo le relazioni

$$f_k(t, q_i, p_i) = c_k \quad (k = 1, \ldots, 2n) \tag{3}$$

in q_i e p_i, otteniamo le equazioni del moto finali

$$q_i = \varphi_i(t, c_1, \ldots, c_{2n}), \quad p_i = \psi_i(t, c_1, \ldots, c_{2n}), \tag{4}$$

che contengono $2n$ costanti arbitrarie $c_1, \ldots, c_{2n}$.

Dunque, se i $2n$ integrali sono conosciuti, allora lo sono anche i moti del sistema. Se conosciamo l integrali indipendenti $f_1, \ldots, f_l$, dove $l < 2n$, allora abbiamo un'idea parziale dei moti del sistema, e più grande è l, più esaudiente è la nostra concezione. Allora siamo sempre interessati alla ricerca del numero più grande possibile di integrali indipendenti.

Familiarizzeremo ora con il metodo di ricerca degli integrali delle equazioni del moto proposto da Poisson e Jacobi.

Sia $f(t, q_i, p_i)$ l'integrale dell'equazione (1). Dunque, sostituendo qualsiasi soluzione del sistema hamiltoniano (1) al posto di q_i, p_i ($i = 1, \ldots, n$), la funzione f si converte in una costante

[1] Questo valore c può cambiare quando passiamo da un moto del sistema ad un altro.

c, cioè in accordo con l'equazione (1)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0. \tag{5}$$

Poisson introdusse un termine particolare, la *parentesi di Poisson*, per la seguente espressione composta dalle derivate parziali di due funzioni arbitrarie $\varphi(t, q_i, p_i)$ e $\psi(t, q_i, p_i)$:

$$(\varphi\psi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right). \tag{6}$$

Per mezzo della parentesi di Poisson l'equazione (5) — condizione necessaria e sufficiente perché la funzione $f(t, q_i, p_i)$ sia l'integrale delle equazioni (1) — può essere scritta come segue:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (fH) = 0. \tag{7}$$

Osserviamo le seguenti proprietà della parentesi di Poisson: per qualunque terna di funzioni $\varphi(t, q_i, p_i)$, $\psi(t, q_i, p_i)$, $\chi(t, q_i, p_i)$ valgono le relazioni

1. $(\varphi\psi) = -(\psi\varphi)$;
2. $(c\varphi\,\psi) = c(\varphi\psi)$ (c è costante);
3. $(\varphi + \psi\chi) = (\varphi\chi) + (\psi\chi)$;
4. $((\varphi\psi)\chi) + ((\psi\chi)\varphi) + ((\chi\varphi)\psi) = 0$;
5. $\frac{\partial}{\partial t}(\varphi\psi) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\psi\right) + \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial t}\right)$.

Le identità 1, 2, 3, 5 si ottengono direttamente dalla definizione (6) della parentesi di Poisson.

L'identità 4, che è chiamata *identità di Poisson*, è stabilita mediante uno speciale ragionamento. Siano X ed Y operatori differenziali del primo ordine applicati alla funzione $f(x_1, \ldots, x_m)$:

$$Xf = \sum_{k=1}^{m} X_k \frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad Yf = \sum_{k=1}^{m} Y_k \frac{\partial f}{\partial x_k}, \tag{8}$$

dove X_k, Y_k ($k = 1, \ldots, m$) sono funzioni delle variabili $x_1, \ldots, x_m$. Allora il « commutatore » $Z = XY - YX$ sarà anch'esso un operatore del primo ordine [1]:

$$Zf = X(Yf) - Y(Xf) = \sum_{k=1}^{m} [X(Y_k) - Y(X_k)] \frac{\partial f}{\partial x_k}. \tag{9}$$

[1] Calcoli diretti mostrano che nel membro destro della (9) tutti i termini contenenti derivate parziali del secondo ordine della funzione f si elidono.

Ritorniamo alla parentesi di Poisson (φf). Essa può essere rivista come il risultato dell'applicazione di un operatore lineare Φ della forma (8) alla funzione f delle variabili q_i, p_i $(i = 1, \ldots, n)$:

$$\Phi f = (\varphi f) = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right). \tag{10}$$

Questo operatore differenziale del primo ordine è completamente determinato dalla funzione φ. Analogamente gli operatori Ψ, X sono determinati dalle funzioni ψ e χ.

Si assuma ora di stabilire direttamente la 4 identità di Poisson. Dopo aver eliminato le parentesi complesse, ogni termine del membro sinistro della 4 conterrà, come uno dei fattori, una derivata parziale del secondo ordine di una delle funzioni φ, ψ, χ. Ma $((\varphi\psi)\,\chi)$ non contiene derivate parziali del secondo ordine di χ e la somma

$$((\psi\chi)\,\varphi) + ((\chi\varphi)\,\psi) = (\psi\,(\varphi\chi)) - (\varphi\,(\psi\chi)) = (\Psi\Phi - \Phi\Psi)\,\chi$$

è un operatore differenziale del primo ordine relativo a χ. Dunque, il membro sinistro dell'identità di Poisson non contiene derivate parziali del secondo ordine di χ, e quindi, in virtù della simmetria, non ci sono derivate parziali del secondo ordine di φ e ψ. In altre parole, tutti i termini del membro sinistro della 4 si elidono, come volevasi dimostrare.

Dimostriamo ora un teorema basilare.

Teorema di Jacobi — Poisson. *Se f e g sono integrali delle equazioni del moto, allora (fg) è ancora un integrale di queste equazioni.*

Dimostrazione. Si richiede la prova che per la funzione (fg) valga la relazione (7)

$$\frac{\partial (fg)}{\partial t} + ((fg)\,H) = 0, \tag{11}$$

quando la stessa relazione vale per ogni funzione f, g:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (fH) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial t} + (gH) = 0. \tag{12}$$

Infatti, dalla 5

$$\frac{\partial}{\partial t}(fg) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\, g\right) + \left(f \frac{\partial g}{\partial t}\right) = -((fH)\,g) - (f\,(gH)) =$$
$$= ((Hf)\,g) + ((gH)\,f).$$

Dunque, usando l'identità di Poisson, otteniamo

$$\frac{\partial (fg)}{\partial t} + ((fg)\,H) = ((fg)\,H) + ((gH)\,f) + ((Hf)\,g) = 0$$

completando così la dimostrazione.

Il teorema ora dimostrato dà una regola automatica che permette di ottenere un terzo integrale dai due integrali $f(t, q_i, p_i)$, $g(t, q_i, p_i)$ per mezzo dell'operatore algebrico e di quello differenziale

$$(fg) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right).$$

Considerando la parentesi di Poisson, per esempio, di f e (fg), otteniamo nuovamente un integrale, e così via. Ad ogni modo, non dobbiamo dimenticare che il nuovo integrale potrebbe essere sia identicamente nullo che una funzione dei suddetti integrali conosciuti. Così, solo da un'opportuna scelta degli integrali indipendenti $f_1, \ldots, f_l$ $(l < 2n)$ possiamo essere sicuri di ottenere, per mezzo della parentesi di Poisson, gli integrali $f_{l+1}, \ldots, f_{2n}$ che mancano, qualora vogliamo un sistema completo.

Per esempio, possiamo considerare [1] gli integrali dei momenti e dei momenti angolari per un sistema di particelle libere, isolato da azioni esterne [2]

$$P_x = \sum p_x, \quad P_y = \sum p_y, \quad P_z = \sum p_z,$$

$$M_x = \sum m_x = \sum (yp_z - zp_y), \quad M_y = \sum m_y = \sum (zp_x - xp_z),$$

$$M_z = \sum m_z = \sum (xp_y - yp_x),$$

dove

$$p_x = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}, \quad p_z = m\dot{z}.$$

Le funzioni P_x, P_y, P_z, M_x, M_y, M_z sono integrali, cioè gli « integrali conservativi »

$$\begin{aligned} P_x &= c_1, \quad P_y = c_2, \quad P_z = c_3, \\ M_x &= c_4, \quad M_y = c_5, \quad M_z = c_6, \end{aligned} \tag{13}$$

sono validi se il sistema è isolato. Ad ogni modo, in presenza di un campo di forze esterno con vettore principale $\boldsymbol{R}(X, Y, Z)$ e momento principale $\boldsymbol{L}_O(L_x, L_y, L_z)$ ognuno di questi integrali esiste se la quantità corrispondente delle quantità X, Y, Z, L_x, L_y, L_z è nulla.

Formiamo la parentesi di Poisson per le quantità relative ad una sola particella:

$$(p_x p_y) = 0, \quad (p_x m_y) = -\frac{\partial p_x}{\partial p_x} \frac{\partial m_y}{\partial x} = p_z,$$

$$(m_x m_y) = \frac{\partial m_x}{\partial z} \frac{\partial m_y}{\partial p_z} - \frac{\partial m_x}{\partial p_z} \frac{\partial m_y}{\partial z} = xp_y - yp_x = m_z.$$

---

[1] Vedi L. Landau e L. Pjatigorskij, *Meccanica*, Mosca-Leningrado, 1940, pag. 151 (ed. russa).

[2] In questo esempio la sommatoria è considerata su tutte le particelle del sistema.

Si osservi che la parentesi di Poisson, in cui una quantità (p o m) si riferisce ad una particella, e l'altra ad un'altra particella, è sempre nulla; per questa ragione

$$\begin{cases} (P_x P_y) = \sum (p_x p_y) = 0, \\ (P_x M_y) = \sum (p_x m_y) = \sum p_z = P_z, \\ (M_x M_y) = \sum (m_x m_y) = \sum m_z = M_z. \end{cases} \tag{14'}$$

Permutazioni cicliche delle lettere x, y, z danno relazioni simili:

$$\begin{cases} (P_y P_z) = 0, & (P_z P_x) = 0, \\ (P_y M_z) = P_x, & (P_z M_x) = P_y, \\ (M_y M_z) = M_x, & (M_z M_x) = M_y. \end{cases} \tag{14''}$$

Le sei leggi di conservazione (13) non sono indipendenti. Segue dalle relazioni (14') e (14") che se abbiamo gli integrali

$$P_x = c_1, \quad M_x = c_4, \quad M_y = c_5, \tag{15}$$

allora abbiamo anche gli integrali

$$P_y = c_2, \quad P_z = c_3, \quad M_z = c_6. \tag{16}$$

Tutto ciò è vero, naturalmente, in un campo *potenziale* di forze. In un campo non potenziale di forze,

$$X = 0, \quad L_x = 0, \quad L_y = 0, \tag{17}$$

non implica le equazioni

$$Y = 0, \quad Z = 0, \quad L_z = 0\ ^1. \tag{18}$$

[1] Gli integrali conservativi (15) sono validi solo se le equazioni (17) sono soddisfatte. Analogamente, gli integrali (16) valgono solo se si hanno le equazioni (18).

III. Principio variazionale e invarianti integrali

§ 16. *Principio di Hamilton*

Consideriamo un arbitrario sistema olonomo con coordinate indipendenti $q_1, \ldots, q_n$ e la funzione lagrangiana $L(t, q_i, \dot{q}_i)$. L'integrale

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt \tag{1}$$

è detto *azione* (*nel senso di Hamilton*) durante un intervallo di tempo (t_0, t_1) e l'espressione $L\, dt$ è l'*azione elementare* [1].

Dato che la funzione L è della forma $L = L(t, q_i, \dot{q}_i)$, è necessario, per il calcolo dell'azione (1), specificare le funzioni $q_i = q_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ nell'intervallo di tempo $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. In altre parole, *l'azione W è un funzionale che dipende dal moto del sistema.*

Se specifichiamo arbitrariamente le funzioni $q_i = q_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$, otteniamo un dato moto cinematicamente possibile (che è un moto compatibile con i vincoli). Nello spazio esteso di coordinate a $(n + 1)$ dimensioni, dove le quantità q_i e il tempo t sono le coordinate, questo moto è rappresentato da una certa curva. Considereremo tutte queste possibili curve, o « traiettorie » passanti per due determinati punti dello spazio $M_0(t_0, q_i^0)$ e $M_1(t_1, q_i^1)$ (vedi fig. 29 per $n = 2$), cioè tutti i possibili moti che spostano il sistema da una data posizione iniziale (q_i^0), occupata al tempo t_0, in una posizione finale (q_i^1) che esso occuperà nell'istante t_1. Qui, inizialmente fissiamo i tempi iniziale e finale t_0 e t_1, e le posizioni iniziale e finale del sistema. Diversamente i moti sono arbitrari.

Se il sistema è naturale e vincolato, allora i moti, qui discussi sono soggetti ad una restrizione: durante il moto del sistema i vincoli imposti alle particelle del sistema non devono essere violati. Questa condizione è soddisfatta automaticamente quando si spe-

[1] Per sistemi naturali, $L = T - \Pi$ ha le dimensioni dell'energia. Dunque, le dimensioni dell'azione sono energia $\times$ tempo $\equiv$ forza $\times$ lunghezza $\times$ tempo.

cifica il moto in coordinate indipendenti, assumendo $q_i = q_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Si supponga che tra le traiettorie considerate ci sia una cosiddetta traiettoria « rettilinea », cioè lungo la quale il sistema possa muoversi per una funzione specificata L (cioè in un dato campo di forze). Per una traiettoria rettilinea le funzioni $q_i = q_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ soddisfano le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Tutte le altre traiettorie passanti per i punti M_0 e M_1 saranno chiamate traiettorie « curvilinee ». (Nella fig. 29, la traiettoria

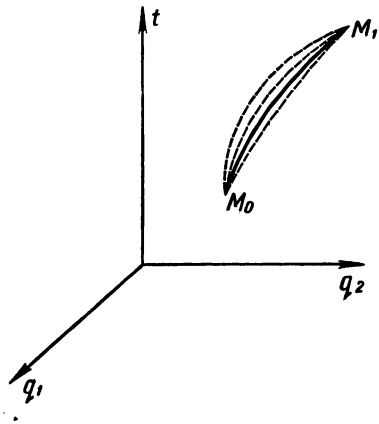


Fig. 29

rettilinea è disegnata con una linea continua, le traiettorie curvilinee con linee tratteggiate.)

Dimostreremo che *l'azione W ha un valore estremale (più precisamente stazionario), per la traiettoria rettilinea rispetto alle traiettorie curvilinee.* Su ciò si basa il principio di Hamilton [1].

Si consideri una famiglia arbitraria di traiettorie ad un parametro

$$q_i = q_i(t, \alpha) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1;\ -\gamma \leqslant \alpha \leqslant \gamma;\ i = 1, \ldots, n)$$

contenente, per $\alpha = 0$, una data curva rettilinea; per $\alpha \neq 0$ le traiettorie sono curvilinee. Tutte queste curve hanno un'origine

[1] Questo principio è trattato nei lavori di W. Hamilton pubblicati nel 1834-1835. Hamilton procedette dall'assunzione che il sistema iniziale è scleronomo (egli procedette dal concetto dell'energia cinetica T come forma quadratica delle velocità generalizzate). Questo principio fu formulato e provato per il caso generale di vincoli non stazionari da M. V. Ostrogradskij nel 1848. Per questa ragione, il principio è a volte chiamato principio di Hamilton — Ostrogradskij.

comune M_0 e un comune punto finale M_1:

$$q_i(t_0, \alpha) = q_i^0,\ q_i(t_1, \alpha) = q_i^1 \quad (-\gamma \leqslant \alpha \leqslant \gamma;\ i = 1, \ldots, n).$$

L'azione W, poiché è calcolata lungo una traiettoria appartenente a questa famiglia, è anch'essa una funzione del parametro α:

$$W(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} L[t, q_i(t, \alpha), \dot{q}_i(t, \alpha)]\, dt.$$

Calcoliamo la *variazione* dell'azione W, cioè il differenziale rispetto ad α:

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \delta L\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i\, dt. \tag{3}$$

Qui abbiamo trasformato l'integrale per mezzo dell'integrazione per parti, facendo uso della proprietà commutativa dell'operatore di variazione δ e dell'operatore di differenziazione rispetto al tempo $\frac{d}{dt}$:

$$\delta \dot{q}_i = \delta \frac{d}{dt} q_i(t, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} q_i(t, \alpha)\, \delta\alpha =$$

$$= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} q_i(t, \alpha)\, \delta\alpha \right] = \frac{d}{dt} \delta q_i.$$

La traiettoria rettilinea e tutte le traiettorie curvilinee passano per un punto iniziale e per un punto finale entrambi fissati nello spazio esteso delle coordinate. Dunque, per $t = t_0$ e $t = t_1$ le variazioni $\delta q_i = 0$ e la parte integrale si annulla.

Dall'equazione (3) si è visto che per la traiettoria rettilinea, cioè per $\alpha = 0$, l'espressione sotto il segno d'integrale trasformato è nulla in virtù dell'equazione di Lagrange. E così

$$\textit{per la traiettoria rettilinea}\ \ \delta W = 0. \tag{4}$$

Questa è l'espressione matematica del principio di Hamilton.

La proposizione inversa è ancora vera: se per qualche traiettoria $\delta W = 0$, allora la traiettoria è rettilinea. Infatti, poiché la natura delle variazioni δq_i ($i = 1, \ldots, n$) è arbitraria (agli estremi sono nulle, mentre nei rimanenti punti della traiettoria sono del tutto arbitrarie) allora dalla condizione $\delta W = 0$, in virtù dell'equazione (3), seguono le equazioni (2), cioè le equazioni di Lagrange per una traiettoria rettilinea.

Poiché dal principio di Hamilton derivano le equazioni di Lagrange in coordinate indipendenti (e viceversa), *il principio di Hamilton può essere posto a fondamento della dinamica dei sistemi olonomi* [1].

Le traiettorie rettilinee, cioè i moti « veri » per una data funzione L, possono essere caratterizzate sia dalle equazioni differenziali del moto nella forma lagrangiana che dal principio variazionale di Hamilton. Ad ogni modo, c'è una differenza fondamentale tra le equazioni differenziali del moto e i princìpi variazionali.

Le equazioni differenziali del moto esprimono una data relazione tra l'istante di tempo t, la posizione del sistema, le velocità e le accelerazioni dei suoi punti in quell'istante. Se questa relazione è valida in ogni punto di una traiettoria, allora la traiettoria è rettilinea. Il principio variazionale caratterizza l'intera traiettoria nel suo complesso. Esso formula la proprietà limite (stazionaria) di un certo funzionale, che distingue la traiettoria rettilinea dalle altre traiettorie cinematicamente possibili. Il principio variazionale ha una forma più generale e compatta ed è frequentemente usato come fondamento per la nuova meccanica (non classica).

Osservazione. Le equazioni differenziali (2) sono condizioni necessarie e sufficienti perché la variazione δW, dove l'integrale W ha forma (1), sia nulla. Nel calcolo delle variazioni, le equazioni (2) sono dette *equazioni differenziali di Eulero* per il problema variazionale

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(t, q_i, \dot{q}_i)\, dt = 0.$$

Le equazioni di Lagrange in coordinate indipendenti furono utilizzate per confermare il principio di Hamilton. Ma le stesse equazioni, nel caso di un sistema naturale, furono ottenute dall'equazione generale della dinamica

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu)\, \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{5}$$

Dimostreremo come *il principio di Hamilton può essere confermato direttamente per mezzo dell'equazione generale della dinamica* (5). Allora le equazioni di Lagrange si possono ottenere direttamente dal principio di Hamilton.

Se nelle espressioni di $\boldsymbol{r}_\nu$

$$\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu(t, q_i) \quad (\nu = 1, \ldots, N)$$

[1] La formulazione del principio di Hamilton suddetto presuppone (nel caso di sistema naturale) l'esistenza di un potenziale di forze. La formulazione più generale del principio, che comprende anche il caso di forze non potenziali, sarà data più avanti (formula (9) di pag. 94).

sostituiamo q_i con le funzioni $q_i(t, \alpha)$, allora r_ν diventerà una funzione complessa di t ed α. Differenziamo rispetto ad α, cioè calcoliamo le variazioni

$$\delta r_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r_\nu}{\partial q_i} \delta q_i \quad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{6}$$

Queste formule coincidono con le formule (8) di pag. 38, che determinano gli spostamenti virtuali dei punti di un sistema olonomo. Così, *le variazioni dei raggi vettori per ogni t, sono spostamenti virtuali dei punti del sistema.*

È possibile convincersi di questo senza ricorrere alla formula (6), bensì procedendo unicamente dalla definizione di una varia-

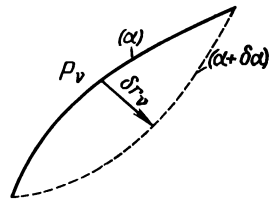


Fig. 30

zione e di uno spostamento virtuale. Infatti, la variazione $\delta r_\nu = \frac{\partial r_\nu}{\partial \alpha} \delta\alpha$ è uno spostamento infinitesimale di un punto del sistema P_ν che muove il punto della traiettoria, associata ad un certo valore fissato di α (per una traiettoria rettilinea $\alpha = 0$), al punto di una traiettoria adiacente che corrisponde al parametro $\alpha + \delta\alpha$ (fig. 30). Qui, *entrambi i punti sono considerati allo stesso istante di tempo t*, affinché, nella differenziazione rispetto ad α, il valore di t sia fissato. Conseguentemente, δr_ν completa la transizione da una possibile posizione del punto P_ν al tempo t ad un'altra posizione possibile nello stesso istante di tempo t, cioè δr_ν è uno spostamento virtuale di un punto P_ν del sistema.

Così, nell'equazione generale della dinamica (5) possiamo considerare δr_ν come una variazione del raggio vettore r_ν. Ma allora è possibile cambiare la sequenza dell'operazione $\frac{d}{dt}$ e dell'operazione δ di differenziazione rispetto ad α:

$$\frac{d}{dt} \delta r_\nu = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \alpha} r_\nu(t, \alpha) \delta\alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha} \dot{r}_\nu(t, \alpha) \delta\alpha = \delta \dot{r}_\nu.$$

Dunque,

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{r}_\nu \delta r_\nu = \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{r}_\nu \delta r_\nu - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{r}_\nu \frac{d}{dt} \delta r_\nu =$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu \delta \boldsymbol{r}_\nu - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu \delta \dot{\boldsymbol{r}}_\nu = \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu \delta \boldsymbol{r}_\nu - \delta T, \qquad (7)$$

dove δT è una variazione dell'energia cinetica $T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu^2$.

Come prima, denotando con δA il lavoro elementare delle forze effettive $\boldsymbol{F}_\nu$ negli spostamenti virtuali $\delta \boldsymbol{r}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, N$), possiamo, usando la trasformazione (7), scrivere l'equazione (5) nella forma

$$\delta T + \delta A - \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0.$$

Si integrano entrambi i membri di questa equazione rispetto a t da $t = t_0$ a $t = t_1$:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A)\, dt - \Big[\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu \delta \boldsymbol{r}_\nu \Big]_{t=t_0}^{t=t_1} = 0. \qquad (8)$$

Qui $\Big[\ \Big]_{t=t_0}^{t=t_1}$ denota la differenza tra i valori (per $t = t_1$ e $t = t_0$) dell'espressione nella parentesi quadra. Ma quando $t = t_0$ e $t = t_1$, il raggio vettore $\boldsymbol{r}_\nu$ non varia poiché le posizioni iniziale e finale del sistema sono fissate:

$$\boldsymbol{r}_\nu (t_0, \alpha) = \boldsymbol{r}_\nu^0, \quad \boldsymbol{r}_\nu (t_1, \alpha) = \boldsymbol{r}_\nu^1 \quad (\nu = 1, \ldots, N).$$

Dunque, $\delta \boldsymbol{r}_\nu = 0$ per $t = t_0$ e per $t = t_1$. Il secondo membro della (8) è nullo, e questa equazione assume la forma

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A)\, dt = 0. \qquad (9)$$

Consideriamo il caso in cui le forze hanno potenziale $\Pi = \Pi(t, q_i)$. Allora

$$\delta A = - \delta \Pi,$$

dove $\delta \Pi$ è il differenziale virtuale (variazione) della funzione $\Pi (t, q_i)$ [1] e l'equazione (9) è scritta

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta \Pi)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta L\, dt = 0,$$

---

[1] Così è $\delta \Pi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \delta q_i$.

da **cui**

$$\delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} L\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta L\, dt = 0.$$

Così, l'equazione di base della dinamica (5) ci ha condotto al principio di Hamilton $\delta W = 0$, e da questo, come su indicato, otteniamo immediatamente le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Per ottenere le equazioni di Lagrange nel caso di forze non potenziali Q_i si deve procedere dall'equazione (9) (al posto della (4)). Applicando la formula (3) all'integrale $\int_{t_0}^{t_1} \delta T\, dt$, cioè sostituendo alla funzione L la funzione $T(t, q_i, \dot{q}_i)$ e usando l'espressione per il lavoro elementare delle forze effettive $\delta A = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i$, troviamo

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i\, dt = 0. \tag{10}$$

Da questa segue che, poiché le quantità δq_i $(i = 1, \ldots, n)$ sono arbitrarie, le espressioni nella parentesi sotto il segno d'integrale (10) debbono essere nulle, cioè le equazioni di Lagrange devono essere valide per la traiettoria rettilinea:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{11}$$

Possiamo verificare che *il valore dell'azione per una traiettoria rettilinea è il minore rispetto a quello delle traiettorie curvilinee.*

Come esempio consideriamo *il moto di una particella vincolata che si muove su una sfera in assenza di campo di forze* (moto inerziale su una sfera). Si assuma la massa della particella $m = 1$. In coordinate sferiche (fig. 31)

$$L = \frac{v^2}{2} = \frac{R^2}{2}(\dot{\varphi}^2 + \operatorname{sen}^2 \varphi \dot{\psi}^2).$$

Per la traiettoria rettilinea

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \text{cost}$$

(dove ψ è una coordinata ciclica), cioè

$$\ddot{\varphi} - \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \dot{\psi}^2 = 0, \quad \operatorname{sen}^2 \varphi \dot{\psi} = \operatorname{sen}^2 \varphi_0 \dot{\psi}_0.$$

Senza mancare di generalità, possiamo dire che la velocità iniziale v_0 per una traiettoria rettilinea è diretta lungo un meridiano ($\psi = \text{cost}$), cioè $\dot{\psi}_0 = 0$, allora

$$\dot{\psi} = 0, \quad \dot{\varphi} = \text{cost} \quad \text{e} \quad v^2 = R^2\dot{\varphi}^2 = \text{cost}.$$

Dunque, la traiettoria rettilinea equivale al moto uniforme lungo un arco di circonferenza. Qui,

$$W_{\text{cir}} - W_{\text{ret}} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (v^2 - v_0^2)\, dt =$$

$$= v_0 \int_{t_0}^{t_1} (v - v_0)\, dt + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (v - v_0)^2\, dt \geqslant$$

$$\geqslant v_0 \int_{t_0}^{t_1} (v - v_0)\, dt = v_0\,(\sigma_{\text{cir}} - \sigma_{\text{ret}}).$$

La lunghezza dell'arco di circonferenza σ_{ret} è minore della lunghezza σ_{cir} di ogni altra curva sulla sfera congiungente due stessi

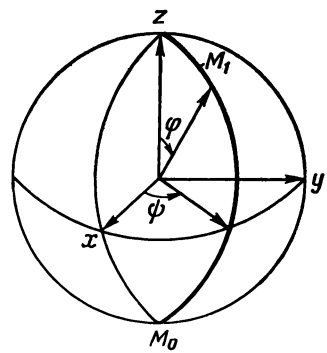


Fig. 31

punti M_0 e M_1. Per questa ragione

$$W_{\text{ret}} < W_{\text{cir}}.$$

Ad ogni modo, ciò è valido solo quando $\sigma_{\text{ret}} = \smile M_0M_1 < \pi R$. Se $\sigma_{\text{ret}} > \pi R$, allora W_{ret} non sarà sempre minore di W_{cir} e il valore minimo dell'azione W sarà ottenuto su un arco ausiliario di un cerchio massimo, che in questo caso sarà la distanza minima tra M_0 e M_1. Se si sposta il punto M_1 lungo un arco di circonferenza incrementando l'arco, allora il punto critico M_0^* (prima di tale punto W_{ret} sarà un minimo, e dopo che M_1 passa per M_0^*, non sarà più tale) è un punto diametralmente opposto al punto M_0.

La situazione è simile nel caso generale. Si può provare [1] che se il punto M_1 è scelto sufficientemente vicino ad M_0, allora una traiettoria rettilinea passa per M_0 e M_1. Ma se la separazione tra M_1 e M_0 è sufficiente, allora due traiettorie rettilinee possono passare per M_0 e M_1 e anche un fascio di traiettorie rettilinee. Tale posizione M_0^* del punto M_1 è detta *fuoco cinetico coniugato* di M_0. Si è stabilito che *un'azione diretta lungo la traiettoria rettilinea M_0M_1 ha il valore minimo rispetto a quello lungo traiettorie curvilinee se sull'arco M_0M_1 non c'è nessun fuoco cinetico M_0^* coniugato a M_0.*

§ 17. *Seconda forma del principio di Hamilton*

Si esamini anche un'altra forma del principio variazionale di Hamilton. Al posto di uno spazio esteso di coordinate a $(n + 1)$

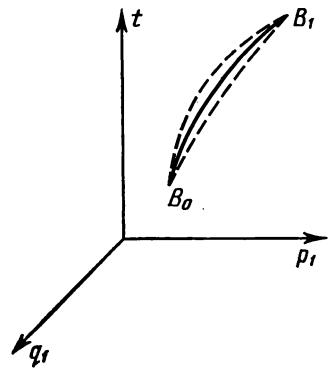


Fig. 32

dimensioni si consideri uno spazio esteso delle fasi a $(2n + 1)$ dimensioni in cui le quantità q_i, p_i $(i = 1, \ldots, n)$ e t siano le coordinate di un punto. In questo spazio consideriamo una traiettoria rettilinea passante per due punti B_0 (q_i^0, p_i^0, t_0) e B_1 (q_i^1, p_i^1, t_1) oltre a tutte le altre curve possibili congiungenti questi due punti (traiettorie curvilinee; vedi fig. 32, $n = 1$).

Le funzioni q_i (t) e p_i (t) $(i = 1, \ldots, n)$, che specificano la traiettoria rettilinea, soddisfano le equazioni di Hamilton

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

[1] Vedi D.K. Bobylev, *Sul principio di Hamilton o di Ostrogradskij e sul principio di minima azione di Lagrange*, Suppl. al vol. LXI, Appunti dell'Acc. delle Scienze, S.Pietroburgo, 1889 (ed. russa).

Introduciamo una funzione di $4n + 1$ variabili indipendenti $L^*(q_i, p_i, \dot{q}_i, \dot{p}_i, t)$ definita dall'equazione [1]

$$L^* = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H(t, q_i, p_i). \tag{2}$$

Con l'aiuto di questa funzione, le equazioni canoniche di Hamilton (1) possono essere scritte, come è verificabile rapidamente, nella forma lagrangiana

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L^*}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{p}_i} - \frac{\partial L^*}{\partial p_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Poiché una traiettoria rettilinea è caratterizzata dalle equazioni (3) del tipo lagrangiano, la traiettoria rettilinea nello spazio esteso delle fasi si distingue dalle traiettorie curvilinee, come è stato precedentemente stabilito, per il fatto che l'integrale

$$\int_{t_0}^{t_1} L^*(t, q_i, p_i, \dot{q}_i, \dot{p}_i)\, dt \tag{4}$$

assume il valore stazionario

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L^*\, dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H \right) dt = 0. \tag{5}$$

A prima vista può sembrare che la seconda forma (5) del principio di Hamilton non differisce in nessun modo dalla prima, $\delta W = 0$, poiché, in accordo con la formula (8) di pag. 74, l'espressione di L^* coincide con la funzione L. Ad ogni modo, questo non è sempre vero; è valido solo per i moti di un sistema, cioè per tali traiettorie $q_i = q_i(t)$, $p_i = p_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$, per cui le funzioni $q_i(t)$ e $p_i(t)$ sono legate dalle relazioni

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

Ad ogni modo, nella seconda forma del principio di Hamilton (a differenza della prima!) *le curve arbitrarie dello spazio esteso delle fasi a* $(2n + 1)$ *dimensioni* passanti per i punti B_0 e B_1 sono, per confronto, riconosciute come traiettorie curvilinee. Queste traiettorie possono non soddisfare le relazioni (6) e per questa ragione, nel caso generale, si ha $L^* \neq L$. Ma se nella formula (5) consideriamo solamente quelle traiettorie curvilinee per cui vale la (6) allora la seconda forma del principio di Hamilton coincide con la prima, $\delta W = 0$.

---

[1] Le $\dot{p}_i$ non sono attualmente presenti nel membro destro della (2). Dunque, la funzione L^* è, in questo caso, indipendente da queste quantità, e $\frac{\partial L^*}{\partial \dot{p}_i} = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Si osservi anche che a differenza dei punti M_0 e M_1 nella prima forma del principio di Hamilton, i punti B_0 e B_1 non possono essere scelti in modo arbitrario poiché è impossibile, nel caso generale, tracciare una traiettoria rettilinea per due punti arbitrari dello spazio esteso delle fasi. I punti B_0 e B_1 sono scelti sulla traiettoria rettilinea per la quale il principio di Hamilton è formulato.

§ 18. *Invariante integrale di base della meccanica (invariante integrale di Poincaré — Cartan)*

Possiamo derivare una formula della variazione dell'azione δW nel caso generale quando gli istanti di tempo iniziale e finale, proprio come le coordinate iniziali e finali, non sono fissati ma sono funzioni del parametro α:

$$\begin{cases} t_0 = t_0(\alpha), & q_i^0 = q_i^0(\alpha), \\ t_1 = t_1(\alpha), & q_i^1 = q_i^1(\alpha) \end{cases} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Qui differenziando l'integrale $W = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt$ rispetto al parametro α e integrando per parti troviamo

$$\delta W = \delta \int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} L\,dt = L_1\,\delta t_1 - L_0\,\delta t_0 +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\,\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\delta \dot{q}_i \right) dt = L_1\,\delta t_1 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} p_i^1\,[\delta q_i]_{t=t_1} - L_0\,\delta t_0 - \sum_{i=1}^{n} p_i^0\,[\delta q_i]_{t=t_0} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i\,dt; \tag{2}$$

$$[\delta q_i]_{t=t_\lambda} = \left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\, q_i(t, \alpha) \right]_{t=t_\lambda} \delta\alpha \quad (i = 1, \ldots, n;\ \lambda = 0, 1). \tag{3}$$

In altre parole, per le variazioni delle coordinate finali $q_i^1 = q_i^1[t_1(\alpha), \alpha]$ abbiamo le formule

$$\delta q_i^1 = \dot{q}_i^1\,\delta t_1 + \left[\frac{\partial q_i(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right]_{t=t_1} \delta\alpha$$

oppure

$$\delta q_i^1 = [\delta q_i]_{t=t_1} + \dot{q}_i^1\,\delta t_1 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Per questo

$$[\delta q_i]_{t=t_1} = \delta q_i^1 - \dot{q}_i^1\,\delta t_1 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

Analogamente

$$[\delta q_i]_{t=t_0} = \delta q_i^0 - \dot{q}_i^0 \, \delta t_0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{5}$$

Sostituendo le espressioni (4) e (5) per $[\delta q_i]_{t=t_1}$ e $[\delta q_i]_{t=t_0}$ nell'espressione (2) per δW, esprimendo come sempre $\dot{q}_i$ in funzione di p_i e osservando che

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - \widehat{L} = H,$$

otteniamo la seguente formula per la variazione dell'azione δW nel caso generale:

$$\delta W = \Big[\sum_{i=1}^{n} p_i \, \delta q_i - H \, \delta t \Big]_0^1 + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Big) \delta q_i \, dt, \tag{6}$$

dove

$$\Big[\sum_{i=1}^{n} p_i \, \delta q_i - H \, \delta t \Big]_0^1 = \sum_{i=1}^{n} p_i^1 \, \delta q_i^1 - H_1 \, \delta t_1 - \sum_{i-1}^{n} p_i^0 \, \delta q_i^0 + H_0 \, \delta t_0.$$

Nel caso particolare quando, per qualche valore di α, la traiettoria appropriata è una retta, cioè quando $q_i = q_i(t, \alpha)$ $(i = 1, \ldots, n)$ è una famiglia di traiettorie rettilinee, l'integrale a destra della (6) è nullo per ogni α, e la formula della variazione dell'azione assume la seguente forma semplificata:

$$\delta W = \Big[\sum_{i=1}^{n} p_i \, \delta q_i - H \, \delta t \Big]_0^1. \tag{7}$$

Invece dello spazio esteso di coordinate a $(n + 1)$ dimensioni prendiamo lo spazio esteso delle fasi a $(2n + 1)$ dimensioni in cui le quantità q_i, p_i $(i = 1, \ldots, n)$ e t sono le coordinate del punto. In questo spazio prendiamo una curva arbitraria chiusa C_0 data dalle equazioni

$$q_i = q_i^0(\alpha), \quad p_i = p_i^0(\alpha), \quad t = t_0(\alpha) \quad (i = 1, \ldots, n; \; 0 \leqslant \alpha \leqslant l). \tag{8}$$

Qui, abbiamo uno stesso punto della curva C_0 per $\alpha = 0$ e $\alpha = l$. Considerando ogni punto sulla curva C_0 come punto iniziale tracciamo la traiettoria rettilinea appropriata. Tale traiettoria è univocamente determinata (dopo la specificazione del punto iniziale) da un sistema di equazioni canoniche di Hamilton. Otteniamo così un cilindro chiuso di traiettorie rettilinee (vedi fig. 33, $n = 1$)

$$q_i = q_i(t, \alpha), \quad p_i = p_i(t, \alpha) \quad (i = 1, \ldots, n; \; 0 \leqslant \alpha \leqslant l), \tag{9}$$

dove

$$q_i(t, 0) \equiv q_i(t, l), \quad p_i(t, 0) \equiv p_i(t, l) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Su questo cilindro scegliamo arbitrariamente una seconda curva chiusa C_1 intorno al cilindro che abbia un solo punto in comune con ogni generatrice. Le equazioni della curva C_1 possono essere scritte nella forma [1]

$$q_i = q_i^1(\alpha), \quad p_i = p^1(\alpha), \quad t = t_1(\alpha). \tag{10}$$

Possiamo esaminare l'azione W lungo la generatrice del cilin-

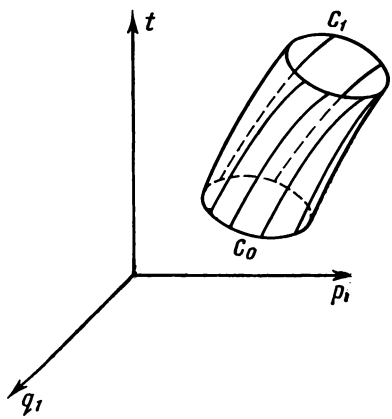


Fig. 33

dro dalla curva C_0 alla curva C_1:

$$W = \int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} L\, dt.$$

Dunque, per ogni α, dalla formula (7),

$$\delta W = W'(\alpha)\,\delta\alpha = \Big[\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - H\,\delta t\Big]_0^1.$$

Integrando questa equazione termine a termine rispetto a α, da $\alpha = 0$ a $\alpha = l$, otteniamo

$$0 = W(l) - W(0) = \int_0^l \Big[\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - H\,\delta t\Big]_0^1 =$$

$$= \int_0^l \Big[\sum_{i=1}^{n} p_i^1\,\delta q_i^1 - H_1\,\delta t_1\Big] - \int_0^l \Big[\sum_{i=1}^{n} p_i^0\,\delta q_i^0 - H_0\,\delta t_0\Big] =$$

[1] Ad ogni valore di α dell'intervallo $0 \leqslant \alpha \leqslant l$ corrisponde una « generatrice » definita del cilindro (traiettoria rettilinea) e su questa generatrice c'è un solo punto appartenente alla curva C_1. Dunque ad ogni valore di α corrisponde un solo punto della curva C_1, cioè le coordinate dei punti della curva C_1 sono funzioni del parametro α.

$$= \oint_{C_1} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H \delta t \right] - \oint_{C_0} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H \delta t \right],$$

cioè

$$\oint_{C_0} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H \delta t \right] = \oint_{C_1} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H \delta t \right]. \tag{11}$$

Si stabilisce cioè che l'integrale curvilineo

$$I = \oint \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H \delta t \right] \tag{12}$$

calcolato lungo un contorno arbitrario chiuso non cambia il suo valore nel caso di uno spostamento arbitrario (con deformazione) del contorno lungo un cilindro di traiettorie rettilinee, cioè è un *invariante integrale.* Chiameremo l'integrale I *invariante integrale di Poincaré — Cartan.*

Ora dimostriamo la proposizione inversa. Si suppone che le traiettorie rettilinee siano definite dal seguente sistema di equazioni differenziali del primo ordine:

$$\frac{dq_i}{dt} = Q_i(t, q_j, p_j), \quad \frac{dp_i}{dt} = P_i(t, q_j, p_j) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{13}$$

Questa supposizione è naturale in quanto il moto di un sistema deve essere definito univocamente in base ai dati iniziali q_i^0, p_i^0 $(i = 1, \ldots, n)$. Sia dato inoltre che l'integrale di Poincaré — Cartan (12) sia un invariante integrale rispetto alle traiettorie rettilinee definite dall'insieme delle equazioni (13), cioè per ogni cilindro di queste traiettorie l'integrale di Poincaré — Cartan calcolato lungo un contorno chiuso intorno al cilindro non varia la sua grandezza quando i punti del contorno chiuso sono spostati arbitrariamente lungo le generatrici del cilindro. Dimostreremo così che le seguenti relazioni tra le funzioni H e Q_i, P_i sono valide:

$$Q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{14}$$

Dimostreremo cioè che le equazioni (13) sono equazioni canoniche di Hamilton con la funzione H che compare nell'espressione sotto il segno dell'integrale I.

Per procedere con la dimostrazione introduciamo una variabile ausiliaria (parametro) μ, aggiungendo anche al sistema (13) un'ulteriore equazione:

$$\frac{dq_1}{Q_1} = \ldots = \frac{dq_n}{Q_n} = \frac{dp_1}{P_1} = \ldots = \frac{dp_n}{P_n} = \frac{dt}{1} = \pi \, d\mu. \tag{15}$$

Qui, $\pi = \pi(t, q_i, p_i)$ è una funzione arbitraria di un punto nello spazio esteso delle fasi. Integrando il sistema (15), troviamo

le espressioni di q_i, p_i e t nella forma di funzioni della variabile μ e dei valori arbitrari iniziali dati q_i^0, p_i^0 ($i = 1, \ldots, n$) e t_0 (per $\mu = 0$)

$$\begin{cases} q_i = \varphi_i(\mu;\ q_j^0,\ p_j^0,\ t_0), \\ p_i = \psi_i(\mu;\ q_j^0,\ p_j^0,\ t_0), \quad (i = 1, \ldots, n). \\ t = \chi(\mu;\ q_i^0,\ p_i^0,\ t_0) \end{cases} \tag{16}$$

Abbiamo così ottenuto le equazioni parametriche per la famiglia di tutte le traiettorie rettilinee. Poiché abbiamo bisogno solo di quelle traiettorie che formano il cilindro dato, dobbiamo scegliere il punto iniziale M_0 (q_j^0, p_j^0, t_0) sulla curva C_0, cioè dobbiamo sostituire i valori

$$q_j^0(\alpha), \quad p_j^0(\alpha), \quad t_0(\alpha)$$

nelle equazioni (16) al posto di q_j^0, p_j^0 e t_0. Dunque troveremo le equazioni parametriche per le traiettorie rettilinee che formano il cilindro dato:

$$q_i = q_i(\mu, \alpha), \quad p_i = p_i(\mu, \alpha), \quad t = t(\mu, \alpha)$$
$$(i = 1, \ldots, n;\ 0 \leqslant \alpha \leqslant l).^1 \tag{17}$$

Qui, il valore di α caratterizza una determinata traiettoria rettilinea (la « generatrice » del cilindro) mentre il valore del parametro μ fissa un punto definito di questa traiettoria.

Assumendo μ = cost, individuiamo un punto su ogni generatrice, e sul cilindro otteniamo una curva chiusa. Assumiamo che nell'integrale (12), q_i, p_i e t siano sostituite dalle loro espressioni (17). Allora l'integrale I sarà una funzione del parametro μ e per ogni valore fissato di μ, esso sarà un integrale curvilineo lungo la corrispondente curva chiusa μ = cost.

In virtù dell'invarianza

$$dI = 0,$$

dove la lettera d denota la differenziazione rispetto al parametro μ. Differenziando sotto il segno di integrale, troviamo

$$0 = \oint \Big[\sum_{i=1}^{n} (dp_i\, \delta q_i + p_i d\, \delta q_i) - dH\, \delta t - H d\, \delta t \Big].$$

Scrivendo $\delta\, dq_i$ e $\delta\, dt$ al posto di $d\, \delta q_i$ e $d\, \delta t$ ed integrando per parti lungo il contorno chiuso, otteniamo [1]

---

[1] Le operazioni d e δ possono essere invertite d'ordine poiché rappresentano la differenziazione rispetto alle differenti variabili indipendenti μ e α. Inoltre quando si integra per parti, la parte integrata è persa (è nulla) poiché il punto finale dell'integrale coincide con quello iniziale. Dunque, per ogni coppia di u e v, $\oint u\, \delta v = -\oint v\, \delta u$ quando si integra lungo un contorno chiuso.

$$0 = \oint \left[\sum_{i=1}^{n} (dp_i\, \delta q_i - \delta p_i\, dq_i) - dH\, \delta t + \delta H\, dt \right] =$$

$$= \oint \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[\left(dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dt \right) \delta q_i + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left(-dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dt \right) \delta p_i \right] + \left(-dH + \frac{\partial H}{\partial t} dt \right) \delta t \right\},$$

o, in virtù della (15), dividendo termine a termine per $d\mu = \frac{dt}{\pi}$,

$$0 = \oint \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[\left(P_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \left(-Q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i \right] + \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{dH}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} \right) \delta t \right\} \pi. \qquad (18)$$

L'espressione sotto il segno d'integrale deve essere un differenziale totale con un fattore arbitrario π; ma ciò è possibile solo quando l'espressione nelle parentesi graffe è zero. Eguagliando questa espressione a zero, otteniamo

$$P_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

che completa la dimostrazione [1].

Da questo fatto segue che *l'invarianza dell'integrale di Poincaré — Cartan può essere posta come fondamento della meccanica* poiché da questa invarianza deriva che il moto di un sistema obbedisce alle equazioni canoniche di Hamilton.

Osservazione. Nella dimostrazione abbiamo introdotto una variabile ausiliaria μ e usato il fatto che l'integrale I non cambia il suo valore passando da una curva della famiglia μ = cost ad un'altra curva della stessa famiglia. Poiché la funzione $\pi\ (t, q_i, p_i)$ è arbitraria, la famiglia di curve μ = cost è ancora una famiglia arbitraria di curve chiuse, che non si intersecano, intorno al cilindro di traiettorie rettilinee date. Se non avessimo introdotto il parametro μ, e avessimo considerato come parametro il tempo t, allora, secondo lo stesso ragionamento, avremmo fatto solo un uso parziale dell'invarianza dell'integrale I (solo per le curve dagli stati simultanei t = cost) e non avremmo conseguito il risultato desiderato.

Ora studiamo più dettagliatamente la struttura dell'integrale di Poincaré — Cartan.

---

[1] Otteniamo anche l'identità $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$, che è una conseguenza delle equazioni canoniche di Hamilton (vedi equazione (20), pag. 76).

Nell'integrale di Poincaré — Cartan (12) il tempo t compare come la coordinata q_i, e il ruolo del momento corrispondente è giocato dalla quantità $-H$, cioè l'energia presa con segno opposto. Questa è un'importante analogia.

Cambiamo le variabili nell'integrale I, introduciamo una nuova variabile z legata con le vecchie variabili dalla relazione

$$z = -H\ (t,\ q_i,\ p_i). \tag{19}$$

Usando questa relazione possiamo esprimere p_1

$$p_1 = -K\ (t,\ q_1,\ \ldots,\ q_n,\ z,\ p_2,\ \ldots,\ p_n). \tag{20}$$

Allora l'integrale di base I nelle nuove variabili sarà

$$I = \oint z\,\delta t + p_2\,\delta q_2 + \ldots + p_n\,\delta q_n - K\,\delta q_1. \tag{21}$$

Dunque, nelle nuove variabili l'integrale I ha l'aspetto dell'integrale di Poincaré—Cartan, ma il ruolo del tempo è ora giocato dalla variabile q_1 e al posto della precedente energia H abbiamo il momento p_1 preso con segno opposto, cioè K. Allora, con questo è stato dimostrato che il moto di un sistema nelle nuove variabili deve essere descritto dal seguente sistema hamiltoniano di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{dq_1} = \dfrac{\partial K}{\partial z}, \quad \dfrac{dz}{dq_1} = -\dfrac{\partial K}{\partial t}, \\ \dfrac{dq_j}{dq_1} = \dfrac{\partial K}{\partial p_j}, \quad \dfrac{dp_j}{dq_1} = -\dfrac{\partial K}{\partial q_j} \quad (j = 2,\ \ldots,\ n), \end{cases} \tag{22}$$

dove q_1 è la variabile indipendente.

Possiamo rappresentare questo nel caso di un oscillatore lineare per cui

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{cq^2}{2}.$$

Si formino le equazioni canoniche considerando q come variabile indipendente. A questo scopo poniamo

$$z = -\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{cq^2}{2}\right),$$

da cui

$$p = \sqrt{m}\,\sqrt{-2z - cq^2}.$$

Così, abbiamo

$$K = -\sqrt{m}\,\sqrt{-2z - cq^2}\,.$$

Le equazioni canoniche appropriate (22) saranno allora della forma

$$\frac{dt}{dq} = \sqrt{\frac{m}{c}}\,\frac{1}{\sqrt{-2\frac{z}{c} - q^2}}, \quad \frac{dz}{dq} = 0.$$

Dalla seconda equazione, $z = \text{cost} = -h$. Troviamo t per mezzo dell'integrazione

$$\omega t = \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2h}{c} - q^2}} - \alpha,$$

dove $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$, e α è una costante arbitraria, oppure

$$\omega t + \alpha = \operatorname{arcsen} \sqrt{\frac{c}{2h}}\, q,$$

cioè

$$q = A \operatorname{sen} (\omega t + \alpha) \quad \left(A = \sqrt{\frac{2h}{c}} \right).$$

§ 19. *Interpretazione idrodinamica dell'invariante integrale di base. Teoremi di Thomson e Helmholtz sulla circolazione e sui vortici*

Per avere un'interpretazione concreta del concetto di invariante integrale, possiamo considerare il moto di un fluido ideale sottoposto all'azione di forze esterne con un potenziale Π (t, x, y, z). Sappiamo dall'idrodinamica [1] che l'equazione del moto di una particella di questo fluido ha la seguente forma:

$$a = -\operatorname{grad} \Pi - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \tag{1}$$

dove a è l'accelerazione della particella, ρ e p sono rispettivamente la densità e la pressione del fluido, mentre il potenziale Π si riferisce all'unità di massa.

Supponiamo che ρ e p siano legati dalla relazione funzionale $\rho = f(p)$ (in particolare, questo è valido in uno studio isotermico del processo). Allora, ponendo

$$\widetilde{\Pi} = \Pi + \int \frac{dp}{\rho},$$

possiamo scrivere l'equazione (1) come

$$a = -\operatorname{grad} \widetilde{\Pi}. \tag{1'}$$

Questa equazione mostra che il moto di una particella di un fluido è uguale a quello di una particella di massa $m = 1$ in un campo potenziale $\widetilde{\Pi} = \widetilde{\Pi}(t, x, y, z)$. Dunque, l'invariante integrale per il moto delle particelle di un fluido sarà l'integrale di Poincaré — Cartan, che in questo caso ha la seguente forma:

$$I = \oint u\, \delta x + v\, \delta y + w\, \delta z - E\, \delta t, \tag{2}$$

---

[1] Vedi, per esempio, N.E. Kočin, I.A. Kibel, N.V. Rose, *Idrodinamica teorica*, vol. I, Mosca-Leningrado, 1948, pag. 48 (ed. russa).

dove u, v e w sono le componenti della velocità della particella (nel caso dato, per $m = 1$, sono i momenti p_i), ed E è l'energia definita dalla formula

$$E = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \widetilde{\Pi}(t,\ x,\ y,\ z). \tag{3}$$

Dunque, l'integrale (2), calcolato lungo un arbitrario contorno chiuso nello spazio a sette dimensioni (t, x, y, z, u, v, w), non cambia per uno spostamento arbitrario dei punti del contorno chiuso secondo il moto del fluido. Questo moto segue le equazioni differenziali che, in virtù della formula (1'), hanno la seguente forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u, & \dfrac{dy}{dt} = v, & \dfrac{dz}{dt} = w, \\ \dfrac{du}{dt} = -\dfrac{\partial \widetilde{\Pi}}{\partial x}, & \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{\partial \widetilde{\Pi}}{\partial y}, & \dfrac{dw}{dt} = -\dfrac{\partial \widetilde{\Pi}}{\partial z}. \end{cases} \tag{4}$$

Per il caso particolare qui studiato, le equazioni (4) sono le equazioni canoniche di Hamilton.

Se il moto specifico di un fluido è dato in modo tale che il campo delle velocità sia conosciuto, cioè se si conoscono le funzioni $u(t, x, y, z)$, $v(t, x, y, z)$ e $w(t, x, y, z)$, allora l'integrale (2) può essere considerato come un integrale in uno spazio esteso di coordinate, cioè nello spazio a quattro dimensioni t, x, y, z. Il valore di questo integrale non cambia se i punti del contorno d'integrazione vengono spostati arbitrariamente lungo le traiettorie del moto delle particelle, cioè l'integrale

$$\oint_C u(t,\ x,\ y,\ z)\,dx + v(t,\ x,\ y,\ z)\,dy + \\ + w(t,\ x,\ y,\ z)\,dz - E(t,\ x,\ y,\ z)\,dt \tag{5}$$

è un invariante integrale nello spazio esteso di coordinate per il moto di un fluido soggetto ad un dato campo di velocità.

Se il contorno d'integrazione è composto di stati simultanei (t = cost) allora l'integrale (2) ha la forma

$$\oint_C u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z. \tag{6}$$

In idrodinamica questo integrale è chiamato *circolazione della velocità* lungo il contorno C. Inoltre otteniamo **il teorema di Thomson sulla conservazione della circolazione della velocità**: *il valore della circolazione* (6) *non cambia se le particelle del fluido, che formano il contorno al tempo* t_1, *vengono trasferite in un'altra posizione occupata nell'istante arbitrario di tempo* t_2.

Se le particelle del fluido in qualche istante di tempo formano una linea, allora queste stesse particelle formeranno un'altra linea in un altro istante di tempo. Parleremo in seguito di « linea

fluida » che si muove e si deforma nel tempo. In modo analogo definiamo il concetto di « superficie liquida ».

Il teorema di conservazione della circolazione stabilisce che *ad ogni linea fluida chiusa corrisponde una circolazione definita.*

Si osservi che per mezzo della formula di Stokes [1] l'integrale (6) può essere scritto come un integrale su una superficie S delimitata dal contorno C:

$$\iint_S \xi\,\delta y\,\delta z + \eta\,\delta z\,\delta x + \zeta\,\delta x\,\delta y, \tag{7}$$

dove

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \qquad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{8}$$

sono le componenti del vettore Ω, detto *vortice* (*rotore*) *della velocità* o semplicemente *vortice*. L'integrale (7) è dato ordinariamente nella forma

$$\iint_S \Omega_n\,dS, \tag{7'}$$

dove Ω_n è la proiezione del vettore Ω sulla normale alla superficie, e dS è un elemento della superficie S. Da questo si vede che l'integrale (7) è *il valore del flusso del vortice* attraverso la superficie. Il teorema della conservazione della circolazione della velocità è collegato al **teorema della conservazione del flusso del vortice:** *ad ogni superficie fluida limitata corrisponde un valore definito del flusso del vortice attraverso questa superficie* [2].

Il moto di un fluido, in un dato campo di velocità, è determinato dalle equazioni differenziali

$$\frac{dx}{dt} = u\,(t, x, y, z), \qquad \frac{dy}{dt} = v\,(t, x, y, z), \qquad \frac{dz}{dt} = w\,(t, x, y, z). \tag{9}$$

Rispetto alle curve integrali del sistema (9), l'integrale (5) è un invariante integrale.

Ora ci poniamo la domanda quale altro sistema di equazioni differenziali del tipo

$$\frac{dx}{P\,(t, x, y, z)} = \frac{dy}{Q\,(t, x, y, z)} = \frac{\partial z}{R\,(t, x, y, z)} = \frac{dt}{U\,(t, x, y, z)} \tag{10}$$

accanto al sistema (9), possiede questa proprietà; in altre parole, per quale altro sistema l'integrale (5) è un invariante integrale?

Per rispondere a questo quesito, introduciamo un parametro μ per le traiettorie del sistema (10) e, come è stato fatto nel paragrafo precedente, uguagliamo le relazioni (10) al prodotto $\pi\,(t, x,$

[1] Vedi, per esempio, G.M. Fikhtengolts, *Fondamenti di analisi matematica*, Mosca, 1956, vol. 2, cap. 22, § 4 (ed. russa).

[2] Da questo segue in particolare, che i vortici nel volume fluido, di un fluido ideale, non possono né crearsi né distruggersi (se naturalmente le forze hanno un potenziale e vale la relazione $\rho = f\,(p)$).

$y, z)\, d\mu$, dove π è una funzione arbitraria. Si consideri un cilindro di curve integrali del sistema (10) e un contorno chiuso C intorno a questo cilindro, per il quale $\mu = \text{cost} = c$. Si osservi che il valore dell'integrale (5) lungo il contorno C non dipende dalla quantità $\mu = c$.

Denotando con d la differenziazione rispetto a μ e ragionando come a pag. 103, otteniamo (usando anche la formula (8))

$$0 = d \oint_C u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z - E\,\delta t =$$

$$= \oint_C du\,\delta x + dv\,\delta y + dw\,\delta z - dE\,\delta t - \delta u\,dx - \delta v\,dy - \delta w\,dz +$$

$$+ \delta E\,dt = \oint_C \left[-\zeta\,dy + \eta\,dz + \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x}\right) dt \right] \delta x + [*]\,\delta y +$$

$$+ [*]\,\delta z + \left[-dE - \frac{\partial u}{\partial t}\,dx - \frac{\partial v}{\partial t}\,dy - \frac{\partial w}{\partial t}\,dz + \frac{\partial E}{\partial t}\,dt \right] \delta t,$$

dove i coefficienti di δy e δz si ottengono dai coefficienti di δx con una permutazione ciclica.

Si sostituisca dx, dy, dz, dt con i denominatori delle frazioni (10) moltiplicati per $\pi\,(t, x, y, z)\,dt$. Poiché, per qualunque scelta della funzione $\pi\,(t, x, y, z)$, l'espressione sotto il segno d'integrale deve essere un differenziale totale, essa deve essere identicamente nulla. E così le espressioni nelle parentesi quadre sono uguali a zero (dopo che i differenziali dx, dy, dz, dt in esse contenuti vengono sostituiti dalle quantità proporzionali P, Q, R, U), cioè si ottengono le equazioni

$$\begin{cases} \eta R - \zeta Q + \left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial E}{\partial x}\right) U = 0, \\ \zeta P - \xi R + \left(\dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial E}{\partial y}\right) U = 0, \\ \xi Q - \eta P + \left(\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial E}{\partial z}\right) U = 0, \end{cases} \tag{11}$$

e

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x}\right) P + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial y}\right) Q + \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial z}\right) R = 0. \tag{12}$$

La relazione (12) è una conseguenza delle equazioni (11) se $U \neq 0$ e delle equazioni (11) e (1′) se $U = 0$.

Le equazioni (11) insieme alle equazioni (10) determinano tutti i sistemi differenziali rispetto ai quali l'integrale (5) è un invariante integrale. Per questi sistemi individuiamo quelli per cui $U = 0$, cioè $dt = 0$. Allora dalle (11) otteniamo

$$\frac{P}{\xi} = \frac{Q}{\eta} = \frac{P}{\zeta},$$

e il sistema (10) assume la forma

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta} = \frac{dt}{0}. \tag{13}$$

Le curve integrali del sistema (13) sono dette *linee di vortice*.

Allora, *il sistema di equazioni differenziali delle linee di vortice è l'unico sistema con* $dt = 0$ *rispetto al quale l'integrale* (5) *è un invariante integrale* [1].

Da questa proposizione segue un importante corollario.

Nello spazio (x, y, z, t) sia considerato un cilindro arbitrario di linee di vortice e due contorni C_1 e C_2 che lo delimitano (fig. 34).

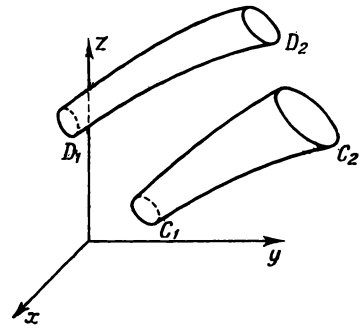


Fig. 34

In virtù dell'invarianza dell'integrale (5) rispetto alle linee di vortice, si ha

$$\oint_{C_1} u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z - E\,\delta t = \oint_{C_2} u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z - E\,\delta t.$$

Introduciamo arbitrariamente la grandezza $\tau > 0$ e spostiamo un qualunque punto dello spazio (x, y, z, t) nel punto $(x', y', z', t + \tau)$, dove x', y', z' sono le coordinate, al tempo $t + \tau$, di quella particella del fluido che al tempo t aveva coordinate x, y, z. In questo spostamento lungo le traiettorie delle particelle del fluido le linee di vortice si muoveranno in certe nuove linee che chiameremo « linee spostate ». Il cilindro delle linee di vortice, che abbiamo considerato, si muoverà nel cilindro delle linee spostate, e i contorni C_1 e C_2 si muoveranno nei contorni D_1 e D_2 (vedi fig. 34) [2]. Poiché lo spostamento è associato al moto delle particelle del fluido, l'integrale (5) non varia durante lo spostamento:

$$\oint_{C_1} = \oint_{D_1}, \quad \oint_{C_2} = \oint_{D_2},$$

ma allora

$$\oint_{D_1} = \oint_{D_2}. \tag{14}$$

[1] L'integrale (5) è un invariante integrale anche per altri sistemi (per esempio per il sistema (9)) per cui $dt \neq 0$.

[2] I cilindri delle linee di vortice qui considerati sono collocati nello spazio a quattro dimensioni (x, y, z, t), ma l'asse t non è rappresentato nella fig. 34.

Si può considerare che D_1 e D_2 siano due contorni arbitrari delimitanti il cilindro delle linee spostate. Dunque, l'equazione (14) esprime l'invarianza dell'integrale (15) rispetto alle « linee spostate ». Qui, $dt = 0$ lungo ogni linea spostata, come lungo una linea di vortice. Segue dunque che le linee spostate hanno le stesse proprietà (come è stato mostrato in precedenza) che solo le linee di vortice possono avere. Quindi, le linee spostate sono linee di vortice. E il tempo di spostamento τ è arbitrario. Dunque, qualunque linea di vortice rimane una linea di vortice durante il moto delle particelle del fluido che la compongono.

Siamo arrivati al **teorema di Helmholtz**, che può essere formulato come segue: *una linea di vortice è una linea fluida.*

Allo stesso tempo troviamo che ad ogni cilindro di vortice è associata una determinata « intensità » definita dall'integrale

$$\oint_C u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z - E\,\delta t. \tag{15}$$

La grandezza di questa intensità non cambia durante il moto del fluido. Se consideriamo il cilindro delle linee di vortice per uno stesso istante di tempo t ($\delta t = 0$), allora l'intensità (15) è la circolazione della velocità intorno al contorno C:

$$\oint_C u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z.$$

§ 20. *Sistemi conservativi generalizzati. Equazioni di Whittaker. Equazioni di Jacobi. Principio di minima azione di Maupertuis — Lagrange*

Consideriamo un sistema conservativo generalizzato, cioè un sistema arbitrario (e forse non naturale) per cui la funzione H non dipende esplicitamente dal tempo. Per esso abbiamo l'integrale generalizzato dell'energia

$$H(q_i, p_i) = h. \tag{1}$$

Questo integrale è analogo all'integrale di conservazione del momento $p_1 = c$, che vale quando q_1 è una coordinata ciclica, cioè quando $\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0$.

Procedendo dall'analogia esistente tra la variabile tempo t ed una coordinata ciclica, possiamo aspettarci che sia possibile, con l'aiuto dell'integrale dell'energia (1), ridurre l'ordine dell'insieme delle equazioni differenziali del moto di due unità.

Tenendo presente questo proposito, consideriamo uno spazio ordinario (cioè non esteso) delle fasi a $2n$ dimensioni, in cui le quantità q_i, p_i ($i = 1, \ldots, n$) sono le coordinate di un punto.

Ci limitiamo a considerare solo quei punti dello spazio delle fasi le cui coordinate soddisfano l'equazione (1) *con un valore fissato per la costante* h_0. In altre parole, ci limitiamo solo a quegli stati del sistema ai quali corrisponde la data grandezza dell'energia totale:

$$H = H(q_i^0, p_i^0) = h_0.$$

Allora l'invariante integrale di base I sarà

$$I = \oint \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i, \tag{2}$$

poiché, in virtù dell'uguaglianza (1),

$$\oint H \delta t = h_0 \oint \delta t = 0.$$

Risolviamo ora l'equazione (1) per uno dei momenti, per esempio p_1:

$$p_1 = -K(q_1, \ldots, q_n, p_2, \ldots, p_n, h_0) \tag{3}$$

e sostituiamo l'espressione ottenuta nell'integrale (2) al posto di p_1; allora

$$I = \oint \left[\sum_{j=2}^{n} p_j \delta q_j - K \delta q_1 \right]. \tag{4}$$

Ma l'invariante integrale (4) ha nuovamente la forma dell'integrale di Poincaré — Cartan, se si assume che le coordinate di base e i momenti siano le quantità q_j e p_j ($j = 2, \ldots, n$), e che la variabile q_1 giochi il ruolo del tempo variabile (al posto della funzione H abbiamo la funzione K). Per questa ragione (vedi § 18) il moto di un sistema conservativo generalizzato dovrebbe soddisfare il seguente sistema hamiltoniano di equazioni differenziali di ordine $2n - 2$:

$$\frac{dq_j}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_j} \quad (j = 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Queste equazioni sono state ricavate da Whittaker e sono conosciute come *equazioni di Whittaker*.

Integrando il sistema delle equazioni di Whittaker troviamo le q_j e p_j ($j = 2, \ldots, n$) come funzioni della variabile q_1 e $2n - 2$ costanti arbitrarie $c_1, \ldots, c_{2n-2}$. Inoltre, gli integrali delle equazioni di Whittaker conterranno una costante arbitraria h_0, cioè avranno la seguente forma:

$$q_j = \varphi_j(q_1, h_0, c_1, \ldots, c_{2n-2}), \quad p_j = \psi_j(q_1, h_0, c_1 \ldots \ldots, c_{2n-2}) \quad (j = 2, \ldots, n) \tag{6}$$

Allora sostituendo l'espressione (6) nella formula (3) troviamo un'espressione analoga per

$$p_1 = \psi_1(q_1, h_0, c_1, \ldots, c_{2n-2}). \tag{6'}$$

Tutte le traiettorie nello spazio delle fasi (cioè il modello geometrico del moto) sono determinate in questo modo.

Otteniamo la dipendenza delle coordinate rispetto al tempo t dall'equazione $\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}$ per mezzo dell'integrazione

$$t = \int \frac{dq_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} + c_{2n-1}, \tag{7}$$

dove tutte le variabili, nella derivata parziale $\frac{\partial H}{\partial p_1}$, sono espresse in funzione di q_1 per mezzo delle equazioni (6) e (6′).

Il sistema hamiltoniano delle equazioni di Whittaker (5) può essere sostituito da un sistema equivalente di equazioni di tipo lagrangiano

$$\frac{d}{dq_1}\frac{\partial P}{\partial q_j'} - \frac{\partial P}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 2, \ldots, n), \tag{8}$$

dove $q_j' = \frac{dq_j}{dq_1}$, e la funzione P (l'analoga della funzione lagrangiana) è legata alla funzione K (l'analoga della funzione hamiltoniana) dall'equazione [1]

$$P = P(q_1, \ldots, q_n, q_2', \ldots, q_n') = \sum_{j=2}^{n} p_j q_j' - K. \tag{9}$$

Si osservi che il sistema (8) contiene non n ma $n - 1$ equazioni del secondo ordine. Nella seconda parte di questa relazione i momenti p_j devono essere sostituiti dalle loro espressioni in funzione di

$$q_2' = \frac{dq_2}{dq_1}, \ \ldots, \ q_n' = \frac{dq_n}{dq_1},$$

che possono essere ottenute dalle prime $n - 1$ equazioni (5).

Trasformiamo l'espressione per la funzione P procedendo dalle equazioni (3) e (9):

$$P = \sum_{j=2}^{n} p_j q_j' + p_1 = \frac{1}{\dot{q}_1} \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i = \frac{1}{\dot{q}_1}(L + H). \tag{10}$$

Nel caso di un sistema naturale, cioè ordinario conservativo, $L = T - \Pi$ e $H = T + \Pi$; segue che

$$P = \frac{1}{\dot{q}_1}(L + H) = \frac{2T}{\dot{q}_1} \tag{11}$$

e l'energia cinetica T può essere scritta come

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = \dot{q}_1^2 G(q_1, \ldots, q_n, q_2', \ldots, q_n'), \tag{12}$$

[1] Vedi l'equazione (8) di pag. 74.

dove

$$G(q_1, \ldots, q_n, q_2', \ldots, q_n') = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} q_i' q_k' \quad (q_1' = 1). \tag{13}$$

Dalle equazioni (1) e (12) troviamo

$$\dot{q}_1 = \sqrt{\frac{h - \Pi}{G}} \tag{14}$$

e per la funzione P otteniamo la seguente espressione:

$$P = \frac{2T}{\dot{q}_1} = 2\sqrt{G(h - \Pi)}. \tag{15}$$

Le equazioni differenziali (8), nelle quali la funzione P è espressa nella forma (15) e per questo fatto appartengono al sistema naturale (cioè ordinario) conservativo, sono chiamate equazioni di Jacobi [1].

Integrando le equazioni di Jacobi, determiniamo tutte le traiettorie nello spazio di coordinate $(q_1, \ldots, q_n)$

$$q_j = \varphi_j(q_1, h, c_1, \ldots, c_{2n-2}). \tag{16}$$

La relazione tra le coordinate e la variabile tempo è stabilita dalla (14) per mezzo di un'integrazione:

$$t = \int \sqrt{\frac{G}{h - \Pi}}\, dq_1 + c_{2n-1}. \tag{17}$$

Stabiliamo ora il principio di minima azione di Maupertuis — Lagrange. Per il fatto che le equazioni (8) sono equazioni di tipo lagrangiano, segue il principio variazionale in accordo con il quale, per una traiettoria rettilinea, si ha

$$\delta W^* = 0, \tag{18}$$

dove

$$W^* = \int_{q_1^0}^{q_1^1} P\, dq_1 \tag{19}$$

è *l'azione lagrangiana*. Qui, tutti i moti del sistema conservativo generalizzato, che trasferiscono il sistema da una determinata posizione iniziale q_i^0 ad una specificata posizione finale q_i^1 (fig. 35), sono accettabili. Gli istanti di tempo t_0 e t_1 non sono fissati e

[1] Queste equazioni sono state ricavate dal matematico tedesco K.G.L. Jacobi e sono trattate nel suo classico *Velvesungen über Dynamik* pubblicato nel 1886. Nel caso di un sistema conservativo generalizzato non naturale, la funzione p contenuta nelle equazioni di Jacobi è determinata dalla formula (9).

possono variare passando dalla traiettoria rettilinea alle traiettorie curvilinee [1].

Esprimendo la funzione P nell'integrale (19) con l'aiuto dell'equazione (10), troviamo la relazione tra l'azione lagrangiana W^* e l'azione hamiltoniana W:

$$W^* = \int_{t_0}^{t_1} (L + H)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt + h \int_{t_0}^{t_1} dt = W + h\,(t_1 - t_0). \qquad (20)$$

Per un sistema ordinario (naturale) conservativo, è possibile avvantaggiarsi dell'espressione (11) e rappresentare l'azione la-

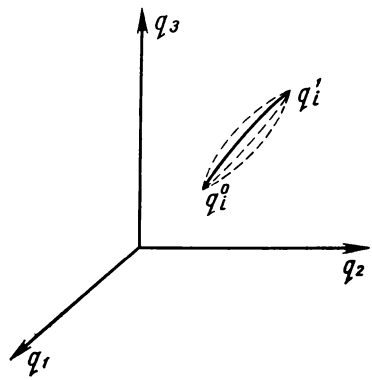


Fig. 35

grangiana nella forma

$$W^* = 2 \int_{t_0}^{t_1} T\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2\, dt = \sum_{\nu=1}^{N} \int_{s_\nu^0}^{s_\nu^1} m_\nu v_\nu\, ds_\nu. \qquad (21)$$

Ma è già stato stabilito che sono permessi solo quei moti del sistema per i quali l'energia totale del sistema assume uno stesso valore h.

L'espressione di W^* ottenuta indica che *l'azione lagrangiana W^* è uguale al lavoro dei vettori del momento dei punti del sistema in uno spostamento corrispondente del sistema.*

Il principio variazionale (18) è conosciuto come *principio di minima azione di Maupertuis — Lagrange* [2].

[1] L'equazione (18) stabilisce che per una traiettoria rettilinea l'azione lagrangiana ha un valore fissato. Il problema di quando l'azione W^* sia minima per una traiettoria rettilinea è risolto utilizzando i fuochi cinetici nello stesso modo che per il principio di Hamilton. Più dettagliatamente vedi G.K. Suslov, *Meccanica teorica*, § 248 (ed. russa).

[2] Formulato per la prima volta vagamente da Maupertuis nel 1747. Nel 1760 Lagrange diede una formulazione rigorosa e sostanziale del principio.

Per chiarire paragoniamo il principio ottico di Fermat con il principio di minima azione di Maupertuis — Lagrange [1].

In accordo con il principio di Fermat, la luce si propaga in un mezzo non omogeneo in modo tale che il tempo di percorrenza

$$t = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{v} \tag{22}$$

è minimo.

Introduciamo, per ogni punto del mezzo, l'indice di rifrazione $n = \frac{c}{v}$, cioè il rapporto tra la velocità della luce c nel vuoto e la velocità v del mezzo dato, trasformiamo la formula (22) in

$$t = \frac{1}{c} \int_{s_0}^{s} n\, ds,$$

dove n è una funzione del punto del mezzo. Allora il principio di Fermat è scritto come

$$\delta \int_{s_0}^{s} n\, ds = 0. \tag{23}$$

In altre parole, per una singola particella di massa m il principio di Maupertuis — Lagrange produce (poiché $\frac{1}{2} mv^2 + \Pi = h$)

$$\delta \int_{s_0}^{s} mv\, ds = \sqrt{m}\, \delta \int_{s_0}^{s} \sqrt{2(h-\Pi)}\, ds = 0. \tag{24}$$

La traiettoria del raggio di luce coincide con la traiettoria di una particella se (vedi le formule (23) e (24))

$$\Pi = h - \frac{1}{2} n^2. \tag{25}$$

Se si assume che nei pressi della superficie della Terra l'indice di rifrazione n diminuisce linearmente in funzione dell'altitudine z

$$n = n_0 \left(1 - k \frac{z}{H}\right), \tag{26}$$

dove H è l'altezza dell'atmosfera, allora, trascurando i termini poco significativi dell'ordine di $\left(\frac{z}{H}\right)^2$, possiamo scrivere

$$\Pi = h - \frac{1}{2} n_0^2 \left(1 - 2k \frac{z}{H}\right) = c + gz, \tag{27}$$

[1] Vedi, per esempio, N.V. Rose, *Lezioni di meccanica analitica*, parte 1, Leningardo, 1938, pagg. 93-94 (ed. russa).

dove

$$c = h - \frac{1}{2} n_0^2, \quad g = \frac{k n_0^2}{H}. \tag{28}$$

La formula (27) definisce il potenziale della forza di gravità nei pressi della superficie della Terra con un valore modificato di g.

Dunque, se l'indice di rifrazione n varia con l'altitudine nel modo su indicato, la luce si propaga secondo una parabola con asse verticale.

§ 21. *Moto inerziale. Linee geodetiche in un moto arbitrario di un sistema conservativo*

Sia dato un sistema scleronomo arbitrario; la sua energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(q_1, \ldots, q_n) \dot{q}_i \dot{q}_k. \tag{1}$$

Introduciamo una metrica nello spazio di coordinate $(q_1, \ldots, q_n)$, determinando il quadrato della lunghezza dell'arco ds^2 con l'aiuto della forma differenziale quadratica definita positiva

$$ds^2 = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(q_1, \ldots, q_n)\, dq_i dq_k. \tag{2}$$

Allora la lunghezza dell'arco della curva che unisce due punti dello spazio di coordinate, (q_i^0) e (q_i), sarà determinata dall'equazione

$$s = \int_{(q_i^0)}^{(q_i)} ds = \int_{(q_i^0)}^{(q_i)} \sqrt{\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} dq_i dq_k}. \tag{3}$$

Paragonando le formule (1) e (2) troviamo che per il moto del sistema si ha

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2, \tag{4}$$

cioè, *l'energia cinetica di un sistema* (data la metrica (2)) *coincide sempre con l'energia cinetica del punto rappresentativo nello spazio di coordinate ad n dimensioni se assegnamo a questo punto una massa* $m = 1$.

Ora si consideri il moto inerziale del sistema ($\Pi = 0$). Allora in questo moto tutte le traiettorie possibili del punto-tipo si riferiscono a *linee geodetiche* rispetto alla metrica (2).

Dall'integrale dell'energia

$$T = h$$

per mezzo della formula (4) segue che

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2h}, \tag{5}$$

cioè al moto inerziale (e anche a qualunque altro moto che ha energia cinetica costante, di valore h) corrisponde nello spazio di coordinate $(q_1, \ldots, q_n)$ un moto uniforme del punto rappresentativo con velocità $\sqrt{2h}$.

In accordo con il principio di minima azione, le linee geodetiche sono i limiti [1] del problema variazionale

$$\delta W^* = 0, \tag{6}$$

dove W^* è l'azione lagrangiana. Ad ogni modo, nel caso qui considerato abbiamo che l'integrale dell'energia $T = h$ ha valore fissato h sia per la traiettoria rettilinea che per una traiettoria curvilinea. Dunque,

$$W^* = \int_{t_0}^{t} 2T\,dt = 2h\,(t - t_0) = \sqrt{2h}\,s, \tag{7}$$

dove $s = \sqrt{2h}\,(t - t_0)$ è la lunghezza della curva nello spazio di coordinate $(q_1, \ldots, q_n)$.

Il problema variazionale (6) assume la forma

$$\delta s = \delta \int_{(q_i^0)}^{(q_i)} \sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\,dq_i\,dq_k} = 0. \tag{8}$$

Così *una linea geodetica si distingue per il fatto che la lunghezza dell'arco della curva ha un valore limite* (*stazionario, per essere più precisi*) *in confronto agli archi delle altre curve aventi gli stessi estremi della linea geodetica* [2] (vedi fig. 35 di pag. 115).

Quando per una traiettoria rettilinea l'azione lagrangiana è un minimo, la lunghezza dell'arco della geodetica è minore della lunghezza di qualunque altra curva che unisce gli stessi punti dell'arco della geodetica.

Per questo motivo le linee geodetiche sono anche dette *linee più corte* dello spazio.

Si consideri ora un sistema conservativo, cioè un sistema scleronomo con energia potenziale $\Pi = \Pi\,(q_1, \ldots, q_n)$ non dipendente in modo esplicito dal tempo t. Allora, dalla (15) e dalla (19)

---

[1] Cioè, le curve per cui W^* ha valore stazi nario.

[2] Ciò è sempre vero quando gli estremi del arco di una linea geodetica sono sufficientemente vicini l'uno all'altro.

del paragrafo precedente, deriva

$$W^* = 2\int_{q_1^0}^{q_1} \sqrt{G\,(h-\Pi)}\,dq_1 = 2\int_{q_i^0}^{q_i} \times$$

$$\times \sqrt{(h-\Pi)\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}dq_i dq_k}. \qquad (9)$$

Dunque, il moto di un sistema conservativo avente un valore h dato dell'energia totale avviene, in uno spazio di coordinate, lungo l'estremale del problema variazionale (con gli estremi fissati)

$$\delta \int_{(q_i^0)}^{(q_i)} \sqrt{(h-\Pi)\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}dq_i dq_k} = 0. \qquad (10)$$

Paragonando la (10) con la (8) concludiamo che *per un sistema conservativo le traiettorie rettilinee sono linee geodetiche nello spazio di coordinate con metrica*

$$ds_1^2 = (h-\Pi)\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}dq_i dq_k. \qquad (11)$$

§ 22. *Invariante integrale universale di Poincaré. Teorema di Lee Hwa-chung*

Si consideri ora l'integrale $I = \oint \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\,\delta t\right]$ lungo il contorno C rispetto a stati simultanei di un sistema. Tale contorno è individuato dalla sezione di un cilindro di traiettorie rettilinee (vedi fig. 33 di pag. 101) tagliato dall'iperpiano t = cost. Per tale contorno, $\delta t = 0$ e l'invariante integrale di base ha la forma

$$I_1 = \oint \sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i. \qquad (1)$$

Questo integrale fu introdotto per la prima volta da Poincaré. Dopo, Cartan estese l'integrale a contorni formati da stati non simultanei introducendo un ulteriore termine $-H\delta t$.

L'invariante integrale di Poincaré I_1 non cambia il suo valore se il contorno C è spostato lungo il cilindro di traiettorie rettilinee nel contorno C', anch'esso relativo a stati simultanei. Con-

viene considerare l'integrale I_1 nello spazio ordinario (non esteso) delle fasi a $2n$ dimensioni $(q_1, p_1, \ldots, q_n, p_n)$. In questo spazio, ai contorni C e C' (fig. 33) corrispondono i contorni D e D' che limitano il cilindro delle traiettorie rettilinee (fig. 36). Qui,

$$\oint_D \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i = \oint_{D'} \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i.$$

Si osservi che uno dei contorni D o D' (diciamo D) può essere scelto arbitrariamente. Si può supporre che i punti del contorno D siano

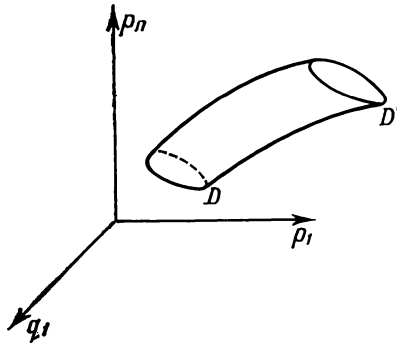


Fig. 36

stati differenti del sistema in uno stesso istante t; allora gli stati corrispondenti del sistema al tempo t' formeranno il contorno D'.

Al posto dello spazio delle fasi, consideriamo n piani delle fasi separati (q_i, p_i) $(i = 1, \ldots, n)$. Si proietti un contorno chiu-

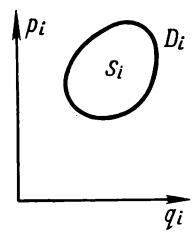


Fig. 37

so qualsiasi D, giacente nello spazio delle fasi, su questi piani (fig. 37). Otteniamo i contorni D_i $(i = 1, \ldots, n)$. Allora per ogni i

$$\oint_D p_i \delta q_i = \oint_{D_i} p_i \delta q_i = \pm S_i, \qquad (2)$$

dove S_i è l'area della regione limitata dal contorno D_i nel piano (q_i, p_i) $(i = 1, \ldots, n)$. Il senso di percorrenza sul contorno D induce il senso di percorrenza sulla proiezione D_i. Nella formula (2) il segno davanti a S_i è positivo, se la circolazione di D_i è oraria (cioè nella direzione della rotazione più breve dall'asse p_i all'asse q_i), o viceversa negativo.

Allora

$$I_1 = \oint \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \pm S_i. \tag{3}$$

Dunque i contorni D e D_i variano durante il moto del sistema, e anche le aree S_i variano, ma *la somma algebrica* (3) *di queste aree rimane costante.* Questa è l'interpretazione geometrica dell'invarianza dell'integrale di Poincaré.

H non appare nell'espressione di I_1. Segue che l'integrale di Poincaré I_1 è invariante rispetto a qualunque sistema hamiltoniano. Per questo fatto l'integrale I_1 è chiamato *invariante integrale universale.*

La seguente proposizione può essere dimostrata rapidamente nello stesso modo.

Se per qualche sistema di equazioni differenziali

$$\frac{dq_i}{dt} = Q_i(t, q_k, p_k), \qquad \frac{dp_i}{dt} = P_i(t, q_k, p_k) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

l'integrale I_1 è invariante, allora il sistema (4) *è hamiltoniano.*

Infatti, in questo caso vale

$$0 = \frac{d}{dt} I_1 = \oint \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dp_i}{dt} \delta q_i + p_i \frac{d}{dt} \delta q_i \right) =$$

$$= \oint \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dp_i}{dt} \delta q_i + p_i \delta \frac{dq_i}{dt} \right) = \oint \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dp_i}{dt} \delta q_i - \frac{dq_i}{dt} \delta p_i \right) =$$

$$= \oint \sum_{i=1}^{n} (P_i \delta q_i - Q_i \delta p_i).$$

Da questo segue che l'espressione sotto il segno di integrale è un differenziale totale virtuale di una funzione $-H(t, q_k, p_k)$ [1]

$$\sum_{i=1}^{n} (P_i \delta q_i - Q_i \delta p_i) = -\delta H(t, q_k, p_k),$$

---

[1] Qui, $\delta H = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right)$.

cioè

$$Q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad P_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

e la dimostrazione è completa.

Si osservino i seguenti termini: l'integrale di Poincaré — Cartan I e l'integrale di Poincaré I_1 sono detti *invarianti integrali relativi* del primo ordine. Il termine « relativo » significa che il dominio di integrazione è un contorno chiuso e il termine « primo ordine » implica che i differenziali nell'espressione sotto il segno d'integrale sono lineari. Si osservi che l'invariante integrale relativo del primo ordine I_1 può, per mezzo della formula di Stokes, essere rappresentato come un invariante integrale assoluto del secondo ordine

$$\oint_D \sum_{i=1}^{n} A_i \, \delta x_i = \iint_S \sum_{i<k}^{1, \ldots, n} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) \delta x_i \, \delta x_k, \tag{5}$$

dove l'integrale a destra è calcolato sulla superficie S limitata dal contorno chiuso D.

Questa formula, applicata all'integrale I_1, dà

$$I_1 = \iint \sum_{i=1}^{n} \delta p_i \, \delta q_i .$$

Sappiamo che nello spazio delle fasi a $2n$ dimensioni esistono i seguenti invarianti integrali universali relativi I_{2k-1} di ordine dispari e i seguenti invarianti integrali assoluti J_{2k} di ordine pari

$$I_1 = \oint \sum p_i \, \delta q_i = J_2 = \int \int \sum \delta p_i \, \delta q_i ,$$

$$I_3 = \oiiint \sum p_i \, \delta q_i \, \delta p_k \, \delta q_k = J_4 = \int \int \int \int \sum \delta p_i \, \delta q_i \, \delta p_k \, \delta q_k ,$$

. . . . . .

$$I_{2n-1} = \oint \cdots \int \sum p_{i_1} \, \delta q_{i_1} \ldots \delta p_{i_n} \, \delta q_{i_n} =$$

$$= J_{2n} = \int \cdots \int \delta p_{i_1} \, \delta q_{i_1} \ldots \delta p_{i_n} \, \delta q_{i_n} .$$

Nel 1947 lo scienziato cinese Lee Hwa-chung dimostrò l'unicità di questi invarianti integrali universali. Dimostrò che ogni altro invariante integrale universale differisce per un fattore costante da uno degli integrali su enumerati [1].

[1] Lee Hwa-chung, *Invariants of Hamilton systems and applications to the theory of canonical transformations*, Proc. Roy. Soc. Edinbourgh, ser. A, v. LXII, 1947, pagg. 237-247.

Avremo bisogno del teorema di Lee Hwa-chung più avanti per un invariante integrale del primo ordine; formuliamo dunque il teorema per un n arbitrario e lo dimostriamo per $n = 1$.

Teorema di Lee Hwa-chung. *Se*

$$I' = \oint_{\gamma} \sum_{i=1}^{n} [A_i(t, q_k, p_k)\,\delta q_i + B_i(t, q_k, p_k)\,\delta p_i]$$

è un invariante integrale universale relativo, allora

$$I' = cI_1, \tag{6}$$

dove c è una costante, e I_1 è l'integrale di Poincaré.

Dimostrazione. Sia

$$I' = \oint_{\gamma} A(t, q, p)\,\delta q + B(t, q, p)\,\delta p$$

un invariante integrale universale. L'integrazione è calcolata lungo un contorno chiuso nel piano delle fasi (q, p). Inoltre, sia dato un qualunque sistema hamiltoniano di equazioni differenziali della funzione $H(t, q, p)$:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{7}$$

La soluzione generale di questo sistema è della forma

$$q = q(t, q_0, p_0), \qquad p = p(t, q_0, p_0), \tag{8}$$

dove q_0, p_0 sono i valori iniziali di q e p per $t = t_0$.

Siano

$$q = q_0(\alpha), \qquad p = p_0(\alpha) \tag{9}$$

$$[0 \leqslant \alpha \leqslant l; \quad q_0(0) = q_0(l), \quad p_0(0) = p_0(l)]$$

le equazioni del contorno chiuso D_0 nel piano delle fasi (fig. 38). I punti, che al tempo $t = t_0$ giacevano sul contorno D_0, formano il contorno D in un qualunque altro istante arbitrario t. Le equazioni parametriche di questo contorno sono ottenute dalle uguaglianze (8) se q_0 e p_0 sono sostituite dalla loro espressione (9). Questo dà

$$q = q(t, \alpha), \qquad p = p(t, \alpha) \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant l). \tag{10}$$

Sostituendo queste funzioni nell'integrale I' al posto di q e p otteniamo I' in funzione del parametro t. Dall'invarianza di I' segue che $\frac{dI'}{dt} = 0$. Differenziando sotto il segno d'integrale e

integrando per parti [1] troviamo

$$0 = \frac{dI'}{dt} = \oint \frac{dA}{dt}\,\delta q + \frac{dB}{dt}\,\delta p + A\,\frac{d}{dt}\,\delta q + B\,\frac{d}{dt}\,\delta p =$$

$$= \oint \frac{dA}{dt}\,\delta q + \frac{dB}{dt}\,\delta p + A\delta\,\frac{dq}{dt} + B\delta\,\frac{dp}{dt} =$$

$$= \oint \frac{dA}{dt}\,\delta q - \delta A\,\frac{dq}{dt} + \frac{dB}{dt}\,\delta p - \delta B\,\frac{dp}{dt} =$$

$$= \oint \left[\left(\frac{\partial A}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial q}\right)\frac{dp}{dt} + \frac{\partial A}{\partial t}\right]\delta q + \left[\left(\frac{\partial B}{\partial q} - \frac{\partial A}{\partial p}\right)\frac{dq}{dt} + \frac{\partial B}{\partial t}\right]\delta p =$$

$$= \oint \left(-Z\,\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial A}{\partial t}\right)\delta q + \left(-Z\,\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial B}{\partial t}\right)\delta p,$$

dove

$$Z = \frac{\partial A}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial q}.$$

L'ultimo integrale è nullo per qualunque valore della variabile t considerata come parametro e per un arbitrario contorno d'in-

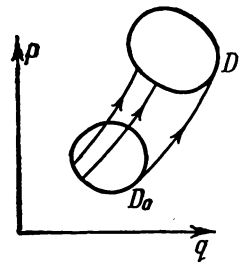


Fig. 38

tegrazione. Dunque l'espressione sotto il segno d'integrale deve essere un differenziale totale rispetto alle variabili q e p. Per questo

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(-Z\,\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial A}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial q}\left(-Z\,\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial B}{\partial t}\right)$$

oppure, dopo trasformazioni elementari,

$$-\frac{\partial Z}{\partial p}\,\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial Z}{\partial q}\,\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial Z}{\partial t} = 0.$$

Poiché la funzione H può essere scelta arbitrariamente, segue che

$$\frac{\partial Z}{\partial p} = \frac{\partial Z}{\partial q} = \frac{\partial Z}{\partial t} = 0,$$

[1] Vedi la nota 1 di pag. 103. Quando, attuando delle trasformazioni, assumiamo $\delta A = \frac{\partial A}{\partial q}\,\delta q + \frac{\partial A}{\partial p}\,\delta p$ e $\delta B = \frac{\partial B}{\partial q}\,\delta q + \frac{\partial B}{\partial p}\,\delta p$, allora usiamo le equazioni (7).

cioè

$$Z = \frac{\partial A}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial q} = \text{cost} = c.$$

Allora

$$\frac{\partial (A - cp)}{\partial p} = \frac{\partial B}{\partial q}$$

e, conseguentemente, esiste una funzione $\Phi(t, q, p)$ tale che [1]

$$(A - cp)\,\delta q + B\delta p = \frac{\partial \Phi}{\partial q}\,\delta q + \frac{\partial \Phi}{\partial p}\,\delta p = \delta \Phi .$$

Ma allora

$$A\,\delta q + B\,\delta p = cp\,\delta q + \delta \Phi$$

e dunque

$$I' = \oint A\,\delta q + B\,\delta p = c \oint p \delta q = cI_1,$$

che completa la dimostrazione.

Per $n > 1$, il procedimento di dimostrazione è iterato, sebbene la dimostrazione diventi più complessa.

§ 23. *Invarianza del volume nello spazio delle fasi. Teorema di Liouville*

Consideriamo l'invariante integrale assoluto « totale »

$$J = \int \ldots \int \delta p_1\,\delta q_1 \ldots \delta p_n\,\delta q_n. \tag{1}$$

L'invarianza di questo integrale implica l'invarianza del volume delle fasi in uno spazio delle fasi a $2n$ dimensioni e ciò si stabilisce nel seguente modo [2].

Scriviamo nella seguente forma le equazioni finali del moto risultanti dall'integrazione delle equazioni di Hamilton:

$$q_i = q_i\,(t, q_k^0, p_k^0), \quad p_i = p_i\,(t, q_k^0, p_k^0) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

dove q_k^0, p_k^0 sono i valori iniziali di q_k, p_k per $t = t_0$ $(k = 1, \ldots, n)$. Nello spazio delle fasi scegliamo un qualunque volume J_0 e prendiamo ogni punto di questo volume come punto iniziale (per $t = t_0$). Allora al tempo t la trasformazione (2) porterà il volume J_0 nel volume J. Dunque,

$$J = \underbrace{\int \ldots \int}_{J_0} I\,\delta q_1^0\,\delta p_1^0 \ldots \delta q_n^0\,\delta p_n^0, \tag{3}$$

---

[1] Qui, il tempo t è considerato un parametro.

[2] D'ora innanzi (vedi § 31) l'invarianza del volume delle fasi sarà stabilita in base alle proprietà generali del moto dei sistemi hamiltoniani.

dove

$$I = \left| \frac{\partial (q_1, p_1, \ldots, q_n, p_n)}{\partial (q_1^0, p_1^0, \ldots, q_n^0, p_n^0)} \right|,$$

cioè I è lo jacobiano composto dalle derivate parziali di q_j, p_j rispetto ai valori iniziali dati q_i^0, p_i^0 $(i, j = 1, \ldots, n)$. Senza mancare di generalità, possiamo considerare che lo jacobiano, sotto il segno d'integrale nella (3), sia positivo e possiamo levare il simbolo di valore assoluto.

Quando $t = t_0$, questo jacobiano è uguale a 1 poiché per questo valore di t tutte le $q_k = q_k^0$ e $p_k = p_k^0$. Quando t varia, lo jacobiano varia in modo continuo, senza annullarsi, poiché i punti singolari, per i quali questo jacobiano può annullarsi, sono eliminati dalla nostra considerazione, cioè si assume che non ci siano tali punti nel volume che stiamo esaminando. Allora lo jacobiano è sempre positivo in questo volume [1].

Differenziando rispetto al tempo t sotto il segno di integrale, otteniamo

$$\left(\frac{dJ}{dt}\right)_{t=t_0} = \underbrace{\int \ldots \int}_{J_0} \left| \frac{dI}{dt} \right|_{t=t_0} \delta q_1 \, \delta p_1 \ldots \delta q_n \, \delta p_n .$$

Si calcoli la derivata dello jacobiano I:

$$\left| \frac{dI}{dt} \right|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^{2n} | I_i |_{t=t_0},$$

dove I_i è il determinante ottenuto dallo jacobiano differenziando la i-esima riga. Ora tenendo conto che

1. per $i \neq j$ $\quad \left| \frac{\partial q_j}{\partial q_i^0} \right|_{t=t_0} = \left| \frac{\partial p_j}{\partial p_i^0} \right|_{t=t_0} = 0,$

2. per ogni i $\quad \left| \frac{\partial q_i}{\partial p_i^0} \right|_{t=t_0} = \left| \frac{\partial p_i}{\partial q_i^0} \right|_{t=t_0} = 0,$

3. per ogni i $\quad \left| \frac{\partial q_i}{\partial q_i^0} \right|_{t=t_0} = \left| \frac{\partial p_i}{\partial p_i^0} \right|_{t=t_0} = 1$

troviamo

$$| I_i |_{t=t_0} = \left| \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i^0} \right|_{t=t_0} \quad \text{per } i = 1, \ldots, n$$

e

$$| I_i |_{t=t_0} = \left| \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i^0} \right|_{t=t_0} \quad \text{per } i = n+1, \ldots, 2n;$$

[1] Nessuna assunzione concernente i punti singolari è richiesta nella dimostrazione di pagg. 162-163 menzionata nella nota precedente.

dunque,

$$\left|\frac{dI}{dt}\right|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^{2n} |I_i|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i^0} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i^0}\right]_{t=t_0} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial q_i^0}\frac{\partial H_0}{\partial p_i^0} - \frac{\partial}{\partial p_i^0}\frac{\partial H_0}{\partial q_i^0}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial^2 H_0}{\partial q_i^0\, \partial p_i^0} - \frac{\partial^2 H_0}{\partial p_i^0\, \partial q_i^0}\right] = 0.$$

Così $\left(\frac{dJ}{dt}\right)_{t=t_0} = 0$. Poiché l'istante iniziale t_0 può essere scelto arbitrariamente, allora per ogni t

$$\frac{dJ}{dt} = 0, \tag{4}$$

cioè la grandezza del volume delle fasi J non cambia per uno spostamento dei punti di questo volume dagli stati occupati al tempo t_0 agli stati occupati in ogni altro istante t arbitrario.

Dall'invarianza del volume delle fasi segue uno dei teoremi di base della meccanica statistica, il teorema di Liouville.

Si immagini un grande numero di copie assolutamente identiche di un sistema, differenti l'una dall'altra solo per i loro stati iniziali q_i^0, p_i^0 ($i = 1, \ldots, n$). Tutte queste copie formano un *insieme statistico.*

Un esempio di insieme statistico è l'insieme delle molecole di un gas in un dato volume.

Ad ogni elemento di volume dV dello spazio delle fasi possiamo assegnare una « massa » $d\mu$ che descrive la quantità delle copie nel dato elemento di volume dV. In virtù della provata invarianza del volume nello spazio delle fasi, la grandezza dV non cambia nel tempo. Fisicamente parlando, la grandezza $d\mu$ non cambia, poiché le copie che in qualche istante di tempo sono nel volume dV saranno spostate insieme al volume. Per questo motivo la densità dell'insieme statistico rimane invariata durante il moto:

$$\rho(t,\ q_i,\ p_i) = \frac{d\mu}{dV}, \tag{5}$$

cioè

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \tag{6}$$

In forma estesa, l'equazione (5) può essere così scritta (vedi § 15):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho H) = 0, \tag{6'}$$

dove (ρH) è una parentesi di Poisson. In accordo con la (6), la funzione $\rho\ (t, q_i, p_i)$ è un integrale del moto.

Abbiamo così dimostrato il seguente teorema.

Teorema di Liouville. *La densità di un insieme statistico è sempre un integrale del moto.*

Così, per esempio, per un sistema conservativo, qualunque funzione dell'energia del sistema può essere trattata come la densità di un insieme statistico.

IV. Trasformazioni canoniche ed equazioni di Hamilton—Jacobi

§ 24. *Trasformazioni canoniche*

La trasformazione di coordinate in uno spazio delle fasi a $2n$ dimensioni (che contiene, nel caso generale, la variabile tempo t come parametro)

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{q}_i &= \widetilde{q}_i(t,\ q_k,\ p_k)\\ \widetilde{p}_i &= \widetilde{p}_i(t,\ q_k,\ p_k)\end{aligned}\right\} \quad \left(i=1,\ \ldots,\ n;\ \frac{\partial(\widetilde{q}_1,\ \widetilde{p}_1,\ \ldots,\ \widetilde{q}_n,\ \widetilde{p}_n)}{\partial(q_1,\ p_1,\ \ldots,\ q_n,\ p_n)}\neq 0\right) \tag{1}$$

è detta *canonica* se trasforma qualunque sistema hamiltoniano

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\qquad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\quad (i=1,\ \ldots,\ n) \tag{2}$$

in un altro sistema hamiltoniano (parlando in generale, con un'altra funzione hamiltoniana $\widetilde{H}$):

$$\frac{d\widetilde{q}_i}{dt}=\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \widetilde{p}_i},\qquad \frac{d\widetilde{p}_i}{dt}=-\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \widetilde{q}_i}\quad (i=1,\ \ldots,\ n). \tag{3}$$

L'importanza dello studio delle trasformazioni canoniche sta nel fatto che queste trasformazioni permettono di sostituire un dato sistema hamiltoniano (2) con un altro sistema hamiltoniano (3) in cui la funzione $\widetilde{H}$ ha una struttura più semplice di H.

Se in uno spazio delle fasi eseguiamo in successione due trasformazioni canoniche, la trasformazione risultante sarà ancora canonica. Inoltre, una trasformazione inversa rispetto ad una certa trasformazione canonica e la trasformazione identica $\widetilde{q}_i = q_i$, $\widetilde{p}_i = p_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ sono canoniche. Dunque, tutte le trasformazioni canoniche nel loro insieme formano un *gruppo*.

Esempio 1. La trasformazione

$$\widetilde{q}_i=\alpha q_i,\qquad \widetilde{p}_i=\beta p_i\quad (i=1,\ \ldots,\ n;\quad \alpha\neq 0,\quad \beta\neq 0),$$

come si può facilmente verificare, è canonica. Essa trasforma il sistema (2) nel sistema (3) con

$$\widetilde{H}=\alpha\beta H.$$

Esempio 2. La trasformazione

$$\widetilde{q}_i=\alpha p_i,\qquad \widetilde{p}_i=\beta q_i\quad (i=1,\ \ldots,\ n;\quad \alpha\neq 0,\quad \beta\neq 0)$$

sarà canonica. In questo caso

$$\widetilde{H} = -\alpha\beta H.$$

Esempio 3. La trasformazione

$$\widetilde{q}_i = p_i \operatorname{tg} t, \quad \widetilde{p}_i = q_i \operatorname{cotg} t \quad (i = 1, \ldots, n)$$

sarà canonica poiché si può rapidamente verificare che dalle equazioni (2) otteniamo sempre le equazioni (3) per

$$\widetilde{H} = -H + \frac{1}{\operatorname{sen} t \cos t} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{q}_i \widetilde{p}_i.$$

Per ricavare le condizioni per le quali la trasformazione (1) è canonica, consideriamo due spazi estesi delle fasi a $(2n + 1)$ dimensioni (q_i, p_i, t) e $(\widetilde{q}_i, \widetilde{p}_i, t)$, tali che uno passa nell'altro per

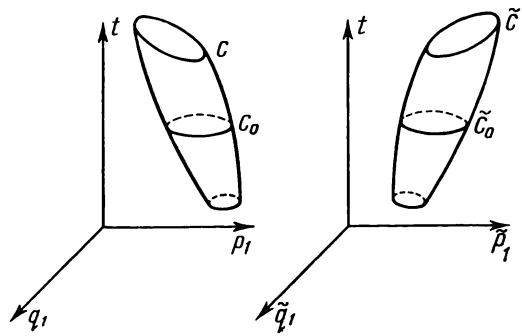


Fig. 39

mezzo delle trasformazioni canoniche (1), e due cilindri di traiettorie rettilinee dei sistemi hamiltoniani (2) e (3) (fig. 39).

Consideriamo due contorni chiusi C e $\widetilde{C}$ che limitano questi cilindri e corrispondono l'uno all'altro in virtù della trasformazione (1). Inoltre, si sezionino entrambi i cilindri con lo stesso iperpiano $t = \text{cost}$. Come sezione otteniamo due contorni « piani » C_0 e $\widetilde{C}_0$. Questi contorni, come previsto, si trasformano uno nell'altro per mezzo della trasformazione canonica (1), poiché la quantità t rimane inalterata per tale trasformazione. Per l'invarianza dell'integrale di Poincaré — Cartan segue che

$$\oint_C \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H \delta t \right] = \oint_{C_0} \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i, \tag{4}$$

$$\oint_{\widetilde{C}} \left[\sum_{i=1}^{n} \widetilde{p}_i \delta \widetilde{q}_i - \widetilde{H} \delta t \right] = \oint_{\widetilde{C}_0} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{p}_i \delta \widetilde{q}_i. \tag{5}$$

In altre parole, se nell' invariante integrale universale $\oint \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \, \delta \tilde{q}_i$ si passa alle variabili q_i, p_i $(i = 1, \ldots, n)$ per mezzo della trasformazione canonica (1), allora questo integrale si trasformerà in un certo invariante integrale universale del primo ordine nello spazio delle fasi a $2n$ dimensioni (q_i, p_i); per mezzo del teorema di Lee Hwa-chung, l'invariante ottenuto può differire da $\oint \sum_{i=1}^{n} p_i \, \delta q_i$ solo per un fattore costante c. Dunque,

$$\oint_{\tilde{C}_0} \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \, \delta \tilde{q}_i = c \oint_{C_0} \sum_{i=1}^{n} p_i \, \delta q_i. \tag{6}$$

Dalle equazioni (4) e (6) segue che

$$\oint_{\tilde{C}} \left[\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \, \delta \tilde{q}_i - \tilde{H} \, \delta t \right] = c \oint_{C} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \, \delta q_i - H \, \delta t \right]. \tag{7}$$

Se nel primo integrale supponiamo che le variabili $\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{p}_n$ siano espresse in funzione delle variabili $q_1, \ldots, p_n$ (qui il contorno d'integrazione $\tilde{C}$ è sostituito con il contorno d'integrazione C), allora l'equazione (7) può essere così espressa:

$$\oint_{C} \left[\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \, \delta \tilde{q}_i - \tilde{H} \, \delta t \right] - c \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \, \delta q_i - H \, \delta t \right] = 0. \tag{8}$$

Ma C è un contorno assolutamente arbitrario in uno spazio esteso delle fasi a $(2n + 1)$ dimensioni. Dunque, l'espressione sotto il segno d'integrale nella (8) deve essere un differenziale totale di qualche funzione dei $2n + 1$ argomenti $q_1, p_1, \ldots, q_n, p_n$ e t. Sarà conveniente esprimere questa funzione nel seguente modo: $-F(t, q_i, p_i)$; allora [1]

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \, \delta \tilde{q}_i - \tilde{H} \, \delta t = c \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \, \delta q_i - H \, \delta t \right) - \delta F. \tag{9}$$

Si osservi che la costante c nell'identità (9) è sempre diversa da zero, $c \neq 0$, poiché l'espressione $\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \, \delta \tilde{q}_i - \tilde{H} \, \delta t$ non è

[1] Qui, $\delta F = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \delta p_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \delta t.$

un differenziale totale [1] e dunque non può essere uguale a $-\delta F$.

Chiameremo la funzione F *funzione generatrice*, e la costante c *valenza* della trasformazione canonica (1) qui considerata. La trasformazione canonica sarà detta *univalente* se $c = 1$.

Una condizione necessaria e sufficiente affinché la trasformazione (1) *sia canonica è che esistano una funzione generatrice F e qualche costante c per cui l'equazione* (9) *sia identicamente soddisfatta in virtù della trasformazione* (1).

Osservazione. Se la trasformazione (1) è canonica, allora esiste una funzione generatrice F e una valenza $c \neq 0$ tali che l'equazione (9) è verificata per *qualsiasi* funzione H e la sua corrispondente $\widetilde{H}$. Però, se la (9) è valida per una coppia di funzioni H e $\widetilde{H}$, allora la trasformazione (1) è canonica [2].

Infatti, oltre ad H consideriamo un'altra funzione arbitraria H_1 e definiamo $\widetilde{H}_1$ dalla condizione

$$\widetilde{H}_1 - \widetilde{H} = c\,(H_1 - H).$$

Moltiplicando entrambi i membri di questa equazione per δt e sottraendo termine a termine l'equazione risultante dalla (9), otteniamo

$$\sum_{i=1}^{n} \widetilde{p}_i\,\delta\widetilde{q}_i - \widetilde{H}_1\,\delta t = c\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - H_1\,\delta t\right) - \delta F.$$

Così, la (9) è valida per qualunque funzione H_1 e per la corrispondente $\widetilde{H}_1$.

Le trasformazioni canoniche sono talvolta chiamate anche *trasformazioni di contatto.*

Nella letteratura sono considerate frequentemente solo le trasformazioni canoniche univalenti. Molti autori ritengono erroneamente che queste trasformazioni esauriscano tutte le trasformazioni (1) che portano sistemi hamiltoniani in altri sistemi hamiltoniani. Questi autori non tengono conto dell'arbitrario fattore costante c che deve figurare nella formula generale di una trasformazione canonica arbitraria.

---

[1] Rispetto alle variabili indipendenti $\widetilde{q}_i$, $\widetilde{p}_i$, t e dunque rispetto alle variabili indipendenti q_i, p_i, t $(i = 1, \ldots, n)$.

[2] Però da questo non segue che una trasformazione canonica può essere definita come trasformazione che trasforma un *dato* sistema hamiltoniano in un qualsiasi altro sistema hamiltoniano.

Così, per esempio, l'arbitraria trasformazione non canonica $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i\,(q_k, p_k)$, $\widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i\,(q_k, p_k)$ $(i = 1, \ldots, n)$ trasforma il sistema hamiltoniano con $H \equiv 0$ in un sistema hamiltoniano con $\widetilde{H} \equiv 0$.

§ 25. *Trasformazioni canoniche libere*

Studieremo, in questo paragrafo, più dettagliatamente le cosiddette trasformazioni canoniche *libere*. Queste trasformazioni sono caratterizzate in più dalla disuguaglianza

$$\frac{\partial(\widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_n)}{\partial(p_1, \ldots, p_n)} \neq 0 \tag{1}$$

che assicura l'indipendenza delle quantità $t, q_1, \ldots, q_n, \widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_n$ che possono essere prese come variabili di base [1]. Infatti, questa disuguaglianza ci permette, usando le prime n equazioni (1) del § 24, di esprimere i momenti generalizzati $p_1, \ldots, p_n$ in funzione delle $2n + 1$ quantità $t, q_i, \widetilde{q}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ e, conseguentemente, di rappresentare ogni funzione delle variabili t, q_i, p_i $(i = 1, \ldots, n)$ nella forma di una funzione delle variabili $t, q_i, \widetilde{q}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. In questo caso si assume che la funzione generatrice sia rappresentata come una funzione S di queste variabili:

$$F(t, q_i, p_i) = S(t, q_i, \widetilde{q}_i).$$

Allora l'identità di base (9) del paragrafo precedente sarà scritta come segue:

$$\sum_{i=1}^{n} \widetilde{p}_i \delta\widetilde{q}_i - \widetilde{H}\delta t = c\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t\right) - \delta S(t, q_i, \widetilde{q}_i). \tag{2}$$

Eguagliando i coefficienti di δq_i, $\delta\widetilde{p}_i$ e δt a destra e a sinistra, otteniamo le seguenti formule:

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = cp_i, \quad \frac{\partial S}{\partial \widetilde{q}_i} = -\widetilde{p}_i \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{3}$$

$$\widetilde{H} = cH + \frac{\partial S}{\partial t}. \tag{4}$$

Le equazioni (3) *definiscono le trasformazioni canoniche qui considerate.* Mostreremo che esse possono essere ridotte alla forma (1) del § 24.

Le derivate parziali $\frac{\partial S}{\partial q_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ dei membri sinistri delle prime n equazioni (3), come funzioni delle quantità $\widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_n$ sono indipendenti, poiché, in virtù della (3), la relazione [2]

$$\Omega\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, q_1, \ldots, q_n\right) = 0$$

potrebbe trasformarsi nell'uguaglianza

$$\Omega(cp_1, \ldots, cp_n, q_1, \ldots, q_n) = 0,$$

[1] Nel caso di una trasformazione canonica non libera le quantità $t, q_i, \widetilde{q}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ sono legate da certe relazioni.

[2] In questa relazione, le quantità $q_1, \ldots, q_n$ sono considerate parametri.

ma ciò è possibile solo quando $\Omega \equiv 0$, poiché le coordinate di un punto dello spazio delle fasi q_i, p_i $(i = 1, \ldots, n)$ sono quantità indipendenti. Dall'indipendenza delle derivate $\frac{\partial S}{\partial q_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$, considerate come funzioni delle variabili $\widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_n$, segue che lo jacobiano di queste funzioni non è identicamente nullo. Così per la funzione generatrice S di una trasformazione canonica libera il determinante deve essere diverso da zero, cioè

$$\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \, \partial \widetilde{q}_k} \right)_{i,\, k=1}^{n} \neq 0. \tag{5}$$

Dalla disuguaglianza (5) segue che le prime n equazioni (3) possono essere risolte in $\widetilde{q}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ e così tutte le nuove variabili dello spazio delle fasi $\widetilde{q}_i$, $\widetilde{p}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ possono essere espresse in funzione delle vecchie variabili q_i, p_i $(i = 1, \ldots, n)$. La trasformazione della forma (1) così ottenuta è reversibile, cioè per essa vale $\frac{\partial(\widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{p}_n)}{\partial(q_1, \ldots, p_n)} \neq 0$, poiché, in virtù della disuguaglianza (5), le ultime n equazioni della (3) possono essere risolte in q_i e, conseguentemente, tutte le variabili q_i, p_i possono essere espresse in funzione di $\widetilde{q}_i$, $\widetilde{p}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Così *le equazioni* (3) *definiscono una trasformazione canonica libera con una data funzione generatrice* S $(t, q_i, \widetilde{q}_i)$ *e con una data valenza* $c \neq 0$, mentre le formule (4) stabiliscono una semplice relazione tra le funzioni hamiltoniane H e $\widetilde{H}$.

Prendendo in considerazione tutte le differenti funzioni generatrici S, che soddisfano la condizione (5), e tutte le differenti valenze $c \neq 0$, possiamo ottenere tutte le trasformazioni [1] canoniche libere con l'aiuto delle formule (3).

Per trasformazioni canoniche libere univalenti $(c = 1)$, le formule (3) e (4) hanno la forma più semplice

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \qquad \frac{\partial S}{\partial \widetilde{q}_i} = -\widetilde{p}_i \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{6}$$

e

$$\widetilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}. \tag{7}$$

L'ultima equazione mostra che dopo aver applicato una stessa trasformazione canonica libera univalente a vari sistemi hamiltoniani, la differenza tra $\widetilde{H}$ e H sarà, in tutti i casi, la stessa $\left(\text{uguale a } \frac{\partial S}{\partial t}\right)$.

Dalla (4) segue che $\widetilde{H} = cH$ quando e solo quando $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$,

[1] Per trasformazioni canoniche non libere esistono formule definite simili alle (3). Queste formule saranno stabilite nel § 29.

cioè quando la funzione generatrice S non dipende esplicitamente da t. In questo caso, in virtù della (3), il tempo t non appare esplicitamente nelle formule della trasformazione canonica. Per tali trasformazioni canoniche la funzione H non cambia essenzialmente, è solo moltiplicata per la costante c. Per questa ragione, se vogliamo ottenere un nuovo sistema con una funzione hamiltoniana essenzialmente più semplice, per definizione dobbiamo considerare una trasformazione canonica libera contenente il tempo t come parametro.

Esempio 1. A pag. 129 abbiamo considerato tre trasformazioni canoniche:

$$1)\ \widetilde{q}_i = \alpha q_i, \quad \widetilde{p}_i = \beta p_i; \quad 2)\ \widetilde{q}_i = \alpha p_i, \quad \widetilde{p}_i = \beta q_i;$$

$$3)\ \widetilde{q}_i = p_i \operatorname{tg} t, \quad \widetilde{p}_i = q_i \operatorname{cotg} t \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Le trasformazioni 2) e 3) sono libere. Hanno come funzioni generatrici e valenze rispettivamente $S = -\beta \sum_{i=1}^{n} q_i \widetilde{q}_i$, $c = -\alpha\beta$; $S = -\operatorname{cotg} t \sum_{i=1}^{n} q_i \widetilde{q}_i$, $c = -1$, ma la trasformazione 1) non è libera. Per essa $c = \alpha\beta$, $F \equiv 0$.

Esempio 2. Consideriamo un'arbitraria trasformazione affine del piano delle fasi (q, p) (con $n = 1$):

$$\begin{cases} \widetilde{q} = \alpha q + \beta p, \\ \widetilde{p} = \alpha_1 q + \beta_1 p \quad (\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta \neq 0). \end{cases} \tag{8}$$

Si sostituiscono i membri destri della (8) nell'identità di base (9) di pag. 131. Poiché la variabile t non compare nei membri destri della (8), potremo scegliere anche F come funzione non dipendente esplicitamente dal tempo t: $F = F(q, p)$. Allora l'identità di base avrà la seguente forma:

$$(\alpha_1 q + \beta_1 p)(\alpha\,\delta q + \beta\,\delta p) - cp\,\delta q = -\delta F$$

oppure

$$\delta\left(\frac{1}{2}\alpha\alpha_1 q^2 + \frac{1}{2}\beta\beta_1 p^2\right) + \alpha_1\beta q\,\delta p + (\alpha\beta_1 - c)\,p\,\delta q = -\delta F.$$

Il membro sinistro di questa equazione sarà un differenziale totale se

$$c = \alpha\beta_1 - \alpha_1\beta.$$

Così, la trasformazione (8) è canonica con valenza c, uguale al determinante della trasformazione e con funzione generatrice

$$F = \frac{1}{2}\alpha\alpha_1 q^2 + \frac{1}{2}\beta\beta_1 p^2 + \alpha_1\beta\, qp.$$

Questa trasformazione sarà libera se $\beta \neq 0$.

Esempio 3. La trasformazione $\widetilde{q} = \sqrt{q}\cos 2p$, $\widetilde{p} = \sqrt{q}\,\operatorname{sen} 2p$ è una trasformazione canonica libera univalente con funzione generatrice

$$S = \frac{1}{2} q \arccos \frac{\widetilde{q}}{\sqrt{q}} - \frac{1}{2}\widetilde{q}\sqrt{q - \widetilde{q}^2}.$$

Per un sistema naturale le coordinate $q_1, \ldots, q_n$ definiscono la posizione del sistema e insieme con i momenti $p_1, \ldots$

$\ldots$, p_n definiscono lo stato del sistema, cioè le posizioni e le velocità dei suoi punti. Questa caratteristica delle coordinate è persa in una trasformazione canonica di tipo generale. Le quantità $\widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_n$ non definiscono più la posizione del sistema, e solo insieme con le $\widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_n$ definiscono lo stato del sistema. Le variabili $\widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_n$ definiranno, come prima, la posizione del sistema solo nel caso particolare di una trasformazione canonica *puntiforme* tale che le funzioni $\widetilde{q}_i\,(t, q_k, p_k)$ non contengono i momenti

$$\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(t, q_k) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Osserviamo che successivamente può essere effettuata una trasformazione di un sistema hamiltoniano arbitrario in un sistema con funzione H di struttura semplice con l'aiuto di una trasformazione canonica libera. Ma una trasformazione canonica libera non è una trasformazione puntiforme. Dunque, le trasformazioni canoniche non puntiformi giocano un ruolo essenziale nella teoria dei sistemi hamiltoniani.

§ 26. *Equazione di Hamilton — Jacobi*

La teoria delle trasformazioni canoniche porta direttamente all'equazione di Hamilton — Jacobi.

Sia dato un sistema olonomo il cui moto segue le equazioni canoniche di Hamilton

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Proveremo a determinare una trasformazione canonica libera univalente tale che nel sistema hamiltoniano trasformato

$$\frac{d\widetilde{q}_i}{dt} = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \widetilde{p}_i}, \quad \frac{d\widetilde{p}_i}{dt} = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \widetilde{q}_i} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

la funzione $\widetilde{H}$ sia identicamente nulla

$$\widetilde{H} \equiv 0. \tag{3}$$

Allora il sistema (2) è integrabile direttamente:

$$\widetilde{q}_i = \alpha_i, \quad \widetilde{p}_i = \beta_i, \tag{4}$$

dove α_i e β_i sono $2n$ costanti arbitrarie. Conoscendo le trasformazioni canoniche, cioè la relazione tra q_i, p_i $(i = 1, \ldots, n)$ e $\widetilde{q}_i$, $\widetilde{p}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, possiamo esprimere tutte le variabili q_i e p_i in funzione del tempo t e delle $2n$ costanti arbitrarie α_k, β_k $(k = 1, \ldots, n)$, cioè possiamo trovare completamente le equazioni del moto finale del sistema olonomo dato (tutte le soluzioni del sistema (1)).

Come determinare la trasformazione canonica di cui abbiamo bisogno? Per fare ciò, in virtù della formula (7) del paragrafo

precedente, è necessario e sufficiente che l'equazione

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\,(t,\ q_i,\ p_i) = 0 \tag{5}$$

sia valida per la funzione generatrice $S\,(t,\ q_i,\ \widetilde{q}_i)$ della trasformazione canonica desiderata. Questa, insieme alle formule (6) dello stesso paragrafo, dà

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t,\ q_i,\ \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) = 0. \tag{6}$$

La risultante equazione a derivate parziali (6) è detta *equazione di Hamilton — Jacobi*. Così la funzione generatrice $S\,(t,\ q_i,\ \widetilde{q}_i)$ nelle variabili di base t e q_i (le $\widetilde{q}_i$ sono considerate parametri) soddisfa l'equazione a derivate parziali di Hamilton — Jacobi. Oltre all'equazione di Hamilton — Jacobi, la condizione

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i\,\partial \widetilde{q}_k}\right)_{i,\,k=1}^{n} \neq 0 \tag{7}$$

deve valere per la funzione generatrice $S\,(t,\ q_i,\ \widetilde{q}_i)$.

Appena trovata la funzione generatrice $S\,(t,\ q_i,\ \widetilde{q}_i)$ le formule

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \qquad \frac{\partial S}{\partial \widetilde{q}_i} = -\widetilde{p}_i \quad (i = 1,\ \ldots,\ n)$$

definiranno la trasformazione canonica libera cercata. Se in queste formule sostituiamo le $\widetilde{q}_i$ con α_i e le $\widetilde{p}_i$ con β_i, otteniamo le equazioni del moto del dato sistema olonomo in forma finita. Questo intero processo è descritto in modo più conveniente se si incomincia col sostituire le $\widetilde{q}_i$ con le α_i $(i = 1,\ \ldots,\ n)$ nella funzione S.

Introduciamo una **definizione.** La soluzione $S\,(t,\ q_i,\ \alpha_i)$ dell'equazione differenziale di Hamilton — Jacobi contenente n costanti arbitrarie $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n$ è detta *integrale completo* di questa equazione se la condizione

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i\,\partial \alpha_k}\right)_{i,\,k=1}^{n} \neq 0 \tag{8}$$

è soddisfatta.

Formuliamo ora il teorema che abbiamo dimostrato.

Teorema di Jacobi. *Se $S\,(t,\ q_i,\ \alpha_i)$ è un qualunque integrale completo dell'equazione di Hamilton — Jacobi* (6), *allora le equazioni finali del moto di un sistema olonomo con una data funzione H possono essere scritte nella forma* [1]

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (i = 1,\ \ldots,\ n), \tag{9}$$

dove α_i e β_i sono costanti arbitrarie $(i = 1,\ \ldots,\ n)$.

[1] Qui, al posto delle costanti arbitrarie $-\beta_i$, scriviamo semplicemente β_i. In virtù della condizione (8), le ultime n equazioni (9) possono essere risolte in q_i e possiamo esprimere le $q_1,\ \ldots,\ q_n$ in funzione di t e delle $2n$ costanti arbitrarie $\alpha_i,\ \beta_i$.

Così, la conoscenza dell'integrale completo dell'equazione a derivate parziali (6) fa in modo che non ci sia più bisogno di integrare il sistema di equazioni differenziali ordinarie (1). Il problema di integrare questo sistema è sostituito da un problema equivalente di ricerca dell'integrale completo dell'equazione a derivate parziali di Hamilton — Jacobi.

Osservazione. La soluzione generale dell'equazione a derivate parziali dipende da alcune funzioni arbitrarie. Per questa ragione un integrale completo dell'equazione di Hamilton — Jacobi non è affatto una soluzione generale. Un integrale completo comprende solo un piccolo numero di soluzioni rispetto ad una soluzione generale. È tuttavia possibile, sulla base di un integrale completo, risalire all'equazione iniziale (da questo fatto deriva il nome di « integrale completo »). Infatti, differenziando l'integrale completo, otteniamo

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = f_i(t,\ q_k,\ \alpha_k) \quad (i = 1,\ \ldots,\ n), \tag{10}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = f_0(t,\ q_k,\ \alpha_k). \tag{11}$$

Se l'integrale completo $S\ (t,\ q_k,\ \alpha_k)$ è conosciuto, allora anche le funzioni $f_i\ (t,\ q_k,\ \alpha_k)$ $(i = 1,\ \ldots,\ n)$ sono conosciute. Dalla relazione (10) è possibile esprimere ogni α_k in funzione delle derivate parziali $\frac{\partial S}{\partial q_i}$, t, q_i, perché, in virtù della condizione (8),

$$\frac{\partial (f_1,\ \ldots,\ f_n)}{\partial (\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)} = \det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i\, \partial \alpha_k} \right)_{i,\ k=1}^{n} \neq 0. \tag{12}$$

Sostituendo nella (11) le espressioni ottenute per α_k otteniamo l'equazione originaria a derivate parziali (6) [1].

Come esempio di integrale completo dell'equazione di Hamilton — Jacobi, consideriamo la cosiddetta *funzione principale di Hamilton*. A questo scopo ritorniamo alla formula (7) di pag. 100 e alla fig. 33 di pag. 101. Consideriamo ora solo il caso particolare di $t_0\ (\alpha) = \text{cost} = t_0$, cioè assumiamo che il contorno C_0 sia composto dagli stati iniziali del sistema quando $t = t_0$. Inoltre, al posto di t_1, q_i^1, p_i^1, H_1 scriveremo semplicemente t, q_i, p_i, H. Allora, se W è l'azione lungo una traiettoria rettilinea (cioè lungo la generatrice del cilindro) dal punto iniziale $(t = t_0)$ al punto finale corrispondente al valore t, otteniamo

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} p_i\, \delta q_i - H\, \delta t - \sum_{i=1}^{n} p_i^0\, \delta q_i^0. \tag{13}$$

[1] Si assuma che l'integrale completo S contenga anche una $(n + 1)$ costante arbitraria additiva α_{n+1}, poiché nell'equazione (6) compaiono solo le derivate di S e non la stessa funzione S.

Se ci serviamo delle equazioni finali del moto

$$q_i = \varphi_i (t,\ q_k^0,\ p_k^0), \qquad (i = 1,\ \ldots,\ n) \tag{14}$$

$$p_i = \psi_i (t,\ q_k^0,\ p_k^0) \tag{15}$$

e se sostituiamo le $q_i\ (t)$ con i loro valori (14) nell'espressione dell'azione

$$W = \int_{t_0}^{t} L\ (t,\ q_i,\ \dot{q}_i)\ dt,$$

allora W sarà una funzione di t, q_i^0, p_i^0 $(i = 1,\ \ldots,\ n)$. Hamilton propose l'uso delle equazioni del moto finali (14) per esprimere p_k^0 in funzione di t, q_i^0, q_i e rappresentare così l'azione nella forma

$$W = W\ (t,\ q_i,\ q_i^0). \tag{16}$$

L'azione W data nella forma (16), cioè come funzione delle coordinate iniziali, delle coordinate finali e dell'istante di tempo finale t, è detta *funzione principale di Hamilton*. Supponendo che nella (13) W sia una funzione principale di Hamilton, otteniamo (in base a questa equazione)

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial W}{\partial q_i^0} = -p_i^0 \quad (i = 1,\ \ldots,\ n) \tag{17}$$

e

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -H\ (t,\ q_i,\ p_i). \tag{18}$$

Dalle equazioni (17) e (18) segue che la funzione principale di Hamilton soddisfa l'equazione di Hamilton — Jacobi

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(t,\ q_i,\ \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = 0, \tag{19}$$

e le relazioni (17) sono le equazioni finali del moto contenenti $2n$ costanti arbitrarie q_i^0, p_i^0 $(i = 1,\ \ldots,\ n)$.

Così, Hamilton dimostrò come le equazioni finali del moto siano espresse per mezzo di un integrale completo dell'equazione (19). Però, nel caso studiato da Hamilton, questo integrale completo non era arbitrario ed in esso le costanti arbitrarie erano i valori iniziali q_i^0 e p_i^0. Il risultato ottenuto era un circolo vizioso: per scrivere le equazioni finali del moto (17) era necessaria la funzione principale di Hamilton, e per costruire questa funzione, come è già stato su dimostrato, era necessario conoscere le equazioni finali del moto.

Il contributo di Jacobi consiste nel fatto che continuò lo studio di Hamilton e spezzò il circolo vizioso. Dimostrò che le equazioni finali del moto avrebbero potuto essere scritte nella forma (9)

per mezzo di un *arbitrario* integrale completo $S(t, q_i, \alpha_i)$ dell'equazione di Hamilton — Jacobi.

Ritorniamo all'identità (13) e paragoniamola con l'identità (2) di pag. 133. Da questo confronto si può vedere che le formule (14) e (15), che sono le equazioni finali del moto ed esprimono le coordinate hamiltoniane q_i e p_i degli stati del sistema al tempo t in funzione delle coordinate iniziali $q_1^0, \ldots, p_n^0$, possono essere riviste come una trasformazione canonica libera univalente dalle variabili q_i^0, p_i^0 $(i = 1, \ldots, n)$ alle variabili q_k, p_k $(k = 1, \ldots, n)$; $-W$ è la funzione generatrice di questa trasformazione canonica, e W è la funzione principale di Hamilton [1].

Così, *una trasformazione dello spazio delle fasi attuata per mezzo delle equazioni del moto di un qualunque sistema hamiltoniano è canonica (e anche libera e univalente).*

Esempio. Si determini la funzione hamiltoniana per il moto inerziale di una particella libera. In questo caso (assunto $t_0 = 0$)

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t, \quad y = y_0 + \dot{y}_0 t, \quad z = z_0 + \dot{z}_0 t$$

e così

$$W = \frac{m}{2} \int_0^t (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\, dt = \frac{mt}{2} (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2) =$$

$$= \frac{m}{2t} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2].$$

Se procediamo dalla funzione principale di Hamilton su trovata

$$W = \frac{m}{2t} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2],$$

allora le equazioni del moto si ottengono dalle formule (17), che nell'esempio dato sono così espresse:

$$p_x = \frac{\partial W}{\partial x} = m \frac{x - x_0}{t}; \quad -p_x^0 = \frac{\partial W}{\partial x_0} = -m \frac{x - x_0}{t},$$

$$p_y = \frac{\partial W}{\partial y} = m \frac{y - y_0}{t}; \quad -p_y^0 = \frac{\partial W}{\partial y_0} = -m \frac{y - y_0}{t},$$

$$p_z = \frac{\partial W}{\partial z} = m \frac{z - z_0}{t}; \quad -p_z^0 = \frac{\partial W}{\partial z_0} = -m \frac{z - z_0}{t}.$$

Supponiamo di avere un sistema conservativo generalizzato $\left(\frac{\partial H}{\partial t} = 0\right)$. Allora l'equazione di Hamilton — Jacobi ha la forma

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) = 0, \tag{20}$$

[1] Per le trasformazioni canoniche inverse dalle variabili q_i, p_i alle variabili q_i^0, p_i^0 la funzione principale di Hamilton W sarà la funzione generatrice.

e il suo integrale completo può essere trovato nella forma

$$S = -ht + V(q_1, \ldots, q_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, h), \qquad (21)$$

dove h, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ sono costanti arbitrarie.

Sostituendo questa espressione di S nell'equazione (20), otteniamo la seguente equazione per determinare la funzione V:

$$H\left(q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}\right) = h. \qquad (22)$$

Trovando l'integrale completo di questa equazione, cioè la soluzione $V(q_i; \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, h)$, per la quale vale la disuguaglianza

$$\det\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial \alpha_k}\right)_{i,\ k=1}^{n} \neq 0 \quad (\alpha_n \equiv h), \qquad (23)$$

otteniamo, con l'aiuto delle formule (9) e (21), le seguenti equazioni finali del moto di un sistema conservativo generalizzato:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad (24')$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_j} = \beta_j \quad (j = 1, \ldots, n-1), \quad \frac{\partial V}{\partial h} = t + \gamma, \qquad (24'')$$

dove α_j, β_j $(j = 1, \ldots, n-1)$, h e γ sono costanti arbitrarie.

In virtù della condizione (23), le coordinate $q_1, \ldots, q_n$ possono essere determinate dall'equazione (24'') come funzioni di t e di $2n$ costanti arbitrarie α_j, β_j, h e γ. Sostituendo le espressioni ottenute nelle equazioni (24'), otteniamo delle espressioni simili per i momenti generalizzati p_i $(i = 1, \ldots, n)$ [1].

Nel caso di un sistema conservativo generalizzato sostituiamo l'equazione (6) con l'equazione (20), in cui il numero di variabili indipendenti è più piccolo di un'unità. Una riduzione simile del numero di variabili indipendenti nell'equazione a derivate parziali può anche essere realizzata con una coordinata ciclica (ignorabile).

Consideriamo ora il caso generale in cui molte coordinate $q_{m+1}, \ldots, q_n$ sono cicliche. Allora $H = H(t, q_1, \ldots, q_m, p_1, \ldots, p_n)$ e l'integrale completo dell'equazione di Hamilton — Jacobi può essere visto nella forma

$$S = \sum_{\mu=m+1}^{n} \alpha_\mu q_\mu + S_0(t, q_1, \ldots, q_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_n). \qquad (25)$$

Per la funzione S_0 otteniamo l'equazione

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} + H\left(t, q_1, \ldots, q_m, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S_0}{\partial q_m}, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n\right) = 0. \qquad (26)$$

[1] Usando le prime $n-1$ equazioni della (24'') è possibile esprimere $n-1$ coordinate in funzione della rimanente n-esima coordinata e delle $2n-1$ costanti arbitrarie. Otteniamo allora le equazioni delle traiettorie nello spazio delle coordinate. L'ultima equazione della (24'') lega le coordinate con il tempo t.

Se in un sistema conservativo generalizzato le coordinate $q_{m+1}, \ldots, q_n$ sono cicliche, allora la funzione S è vista nella forma

$$S = -ht + \sum_{\mu=m+1}^{n} \alpha_\mu q_\mu + V_0(q_1, \ldots, q_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, h), \quad (27)$$

dove la funzione V_0 è determinata dall'equazione

$$H\left(q_1, \ldots, q_m, \frac{\partial V_0}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial V_0}{\partial q_m}, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n\right) = h. \quad (28)$$

§ 27. *Metodo della separazione delle variabili. Esempi*

Abbiamo mostrato che l'integrazione di un sistema di equazioni canoniche si riduce alla ricerca dell'integrale completo dell'equazione di Hamilton — Jacobi. L'interesse qui non è solo teorico. Si vedrà che molti problemi di dinamica, inclusi i problemi di fisica teorica, possono essere convenientemente risolti in questo modo.

Esamineremo ora il metodo della separazione delle variabili per trovare l'integrale completo dell'equazione di Hamilton — Jacobi. Questo metodo si applica nei casi in cui la funzione hamiltoniana H di un sistema conservativo generalizzato ha una struttura particolare.

1. Sia

$$H = G[f_1(q_1, p_1), \ldots, f_n(q_n, p_n)]. \quad (1)$$

Qui le variabili nell'espressione di H sono separate, cioè solo una coppia di variabili coniugate q_i, p_i appare in ogni funzione f_i.

L'equazione (22) del paragrafo precedente sarà ora scritta come

$$G\left[f_1\left(q_1, \frac{\partial V}{\partial q_1}\right), \ldots, f_n\left(q_n, \frac{\partial V}{\partial q_n}\right)\right] = h. \quad (2)$$

Si ponga

$$f_i\left(q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}\right) = \alpha_i \quad (i = 1, \ldots, n), \quad (3)$$

dove $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sono costanti arbitrarie. Allora, per la formula (1), la costante h può essere espressa in funzione delle costanti $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ come segue:

$$h = G(\alpha_1, \ldots, \alpha_n). \quad (4)$$

Risolvendo la (3) per $\frac{\partial V}{\partial q_i}$, troviamo [1]

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = F_i(q_i, \alpha_i) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

$$V = \sum_{i=1}^{n} \int F_i(q_i, \alpha_i)\, dq_i \tag{5}$$

e

$$S = -G(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, t + \sum_{i=1}^{n} \int F_i(q_i, \alpha_i)\, dq_i. \tag{6}$$

In questo caso

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_i\, \partial \alpha_i} = \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_i}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial q_i\, \partial \alpha_k} = 0 \quad \text{per } i \neq k \quad (i, k = 1, \ldots, n)$$

e la condizione basilare

$$\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i\, \partial \alpha_k} \right)_{i,k=1}^{n} \neq 0 \tag{7}$$

si riduce alla disuguaglianza

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_i} \neq 0.$$

Poiché la relazione

$$f_i(q_i, p_i) = \alpha_i \tag{8}$$

è equivalente all'equazione

$$p_i = F_i(q_i, \alpha_i), \tag{9}$$

segue che

$$\frac{\partial F_i}{\partial \alpha_i} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial p_i} \right)^{-1} \neq 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{10}$$

e la condizione (7) è sempre valida. Dunque la formula (6) definisce un integrale completo dell'equazione di Hamilton — Jacobi.

In questo caso le equazioni finali del moto

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{11}$$

---

[1] Assumiamo che ogni funzione $f_i(q_i, p_i)$ in questo caso contenga il momento p_i, cioè che $\frac{\partial f_i}{\partial p_i} \neq 0$. In questo caso l'equazione (3) può essere risolta per $p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$; ogni funzione F_i è una funzione delle due variabili q_i e α_i; $i = 1, \ldots, n$.

saranno scritte come [1]

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial G}{\partial \alpha_i}\, t + \displaystyle\int \frac{dq_i}{\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial p_i}\right)_{p_i = F_i(q_i,\ \alpha_i)}} = \beta_i, \\ p_i = F_i\,(q_i,\ \alpha_i) \end{cases} \qquad (i = 1,\ \ldots,\ n). \tag{12}$$

Così, le equazioni finali del moto sono determinate per mezzo di integrazioni.

Esempio 1. Consideriamo un oscillatore con un grado di libertà. Qui

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{cq^2}{2}$$

e, dunque

$$f(p,\ q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{cq^2}{2}$$

e l'equazione (2) ha la forma

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dV}{dq}\right)^2 + \frac{cq^2}{2} = h.$$

Poniamo $h = \alpha$; allora

$$S = -\alpha t + \int \sqrt{2m\alpha - mcq^2}\, dq$$

e dalle equazioni finali del moto (11) troviamo l'espressione del momento

$$p = \sqrt{2m\alpha - mcq^2} \tag{13}$$

e la stessa equazione del moto sarà così scritta:

$$-t + \frac{1}{\omega}\int \frac{dq}{\sqrt{A^2 - q^2}} = \beta, \tag{14}$$

dove

$$A^2 = \frac{2\alpha}{c}, \quad \omega^2 = \frac{c}{m}.$$

Osservando che l'integrale nella (14) è uguale alla funzione arcsen $\frac{q}{A}$, otte-

---

[1] Nelle (5) e (6) per l'integrale $\int F_i\,(q_i, \alpha_i)\, dq_i$ intendiamo l'integrale $\int_{\gamma_i}^{q_i} F_i\,(q_i, \alpha_i)\, dq_i$, dove la costante γ_i è fissata e non dipende dalla costante arbitraria α_k; allora

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\sum_{k=1}^{n}\int F_k\,(q_k,\ \alpha_k)\, dq_k = \frac{\partial}{\partial \alpha_i}\int F_i\,(q_i,\ \alpha_i)\, dq_i = \int \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_i}\, dq_i.$$

Facciamo allora uso della (10).

niamo l'equazione del moto nella seguente forma:

$$q = A \text{ sen } \omega (t + \beta). \tag{15}$$

2. Sia

$$H = g_n \{ \ldots g_3 \{ g_2 [g_1 (q_1, p_1), q_2, p_2], q_3, p_3 \} \ldots q_n, p_n \}. \tag{16}$$

Allora l'equazione che determina V sarà espressa come

$$g_n \left\{ \cdots g_3 \left\{ g_2 \left[g_1 \left(q_1, \frac{\partial V}{\partial q_1} \right), q_2, \frac{\partial V}{\partial q_2} \right], q_3, \right. \right.$$
$$\left. \left. \frac{\partial V}{\partial q_3} \right\} \cdots q_n, \frac{\partial V}{\partial q_n} \right\} = h.$$

Introduciamo le variabili arbitrarie $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ e $\alpha_n = h$ e, successivamente, poniamo

$$\begin{cases} g_1 \left(q_1, \frac{\partial V}{\partial q_1} \right) = \alpha_1, \\ g_2 \left(\alpha_1, q_2, \frac{\partial V}{\partial q_2} \right) = \alpha_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_n \left(\alpha_{n-1}, q_n, \frac{\partial V}{\partial q_n} \right) = \alpha_n. \end{cases} \tag{17}$$

Calcolando da questa le derivate parziali, troviamo [1]

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = G_1 (q_1, \alpha_1),$$
$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = G_2 (q_2, \alpha_1, \alpha_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial V}{\partial q_n} = G_n (q_n, \alpha_{n-1}, \alpha_n),$$

da cui

$$V = \sum_{i=1}^{n} \int G_i (q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i) \, dq_i \, [2] \tag{18}$$

e

$$S = -\alpha_n t + \sum_{i=1}^{n} \int G_i (q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i) \, dq_i. \tag{19}$$

---

[1] Assumiamo che $\frac{\partial g_i}{\partial p_i} \neq 0$, cioè che p_i compare nella funzione $g_i (q_i, p_i)$.

[2] Qui e più avanti in questo paragrafo, con integrale indefinito è inteso (come nel passo 1) l'integrale definito con limite superiore variabile e limite inferiore fissato e costante indipendente da $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Dunque

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_i\, \partial \alpha_i} = \frac{\partial G_i}{\partial \alpha_i}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial q_i\, \partial \alpha_k} = 0 \quad \text{per } i < k \quad (i,\ k = 1,\ \ldots,\ n).$$

E così la condizione (7) si riduce alla disuguaglianza

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\partial G_i}{\partial \alpha_i} \neq 0$$

che è sempre vera poiché l'equazione

$$g_i\,(\alpha_{i-1},\ q_i,\ p_i) = \alpha_i \tag{20}$$

è equivalente all'equazione

$$p_i = G_i\,(q_i,\ \alpha_{i-1},\ \alpha_i) \tag{21}$$

e per questa ragione

$$\frac{\partial G_i}{\partial \alpha_i} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial p_i}\right)^{-1}_{p_i = G_i(q_i,\ \alpha_{i-1},\ \alpha_i)} \neq 0 \quad (i = 1,\ \ldots,\ n). \tag{22}$$

Nel seguito avremo bisogno delle espressioni delle derivate $\frac{\partial G_i}{\partial \alpha_{i-1}}$, che sono ricavate dalle equazioni (20) e (21), cioè

$$\frac{\partial G_i}{\partial \alpha_{i-1}} = -\left(\frac{\frac{\partial g_i}{\partial \alpha_{i-1}}}{\frac{\partial g_i}{\partial p_i}}\right)_{p_i = G_i(q_i,\ \alpha_{i-1},\ \alpha_i)}. \tag{23}$$

Sostituendo l'espressione (19) nelle equazioni finali del moto (11) e considerando le formule (22) e (23), otteniamo finalmente

$$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{dq_i}{\left(\frac{\partial g_i}{\partial p_i}\right)_{p_i = G_i(q_i,\ \alpha_{i-1},\ \alpha_i)}} - \\ \displaystyle -\int \left(\frac{\frac{\partial g_{i+1}}{\partial \alpha_i}}{\frac{\partial g_{i+1}}{\partial p_{i+1}}}\right)_{p_{i+1} = G_{i+1}(q_{i+1},\ \alpha_i,\ \alpha_{i+1})} dq_{i+1} = \beta_i \\ \qquad (i = 1,\ \ldots,\ n-1), \\ \displaystyle -t + \int \frac{dq_n}{\left(\frac{\partial g_n}{\partial p_n}\right)_{p_n = G_n(q_n,\ \alpha_{n-1},\ \alpha_n)}} = \beta_n \end{cases} \tag{24}$$

e

$$p_i = G_i\,(q_i,\ \alpha_{i-1},\ \alpha_i) \quad (i = 1,\ \ldots,\ n). \tag{25}$$

Qui, le prime $n - 1$ equazioni del sistema (24) sono le equazioni di una famiglia di traiettorie nello spazio di coordinate; queste equazioni contengono $2n - 1$ costanti arbitrarie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$. L'ultima equazione del sistema (24) contiene una nuova costante arbitraria β_n e lega le coordinate q_i con il tempo t.

Dopo aver sostituito nelle equazioni (25) le funzioni $q_i\,(t,\ \alpha_k,\ \beta_k)$ $(i = 1,\ \ldots,\ n)$ trovate dalle (24), le equazioni (25) determinano i momenti p_i $(i = 1,\ \ldots,\ n)$ come funzioni di t e di tutte le costanti arbitrarie α_i, β_i $(i = 1,\ \ldots,\ n)$.

Esempio 2. Si consideri un moto kepleriano in cui una particella di massa m sia attratta verso un centro con una forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal centro.

In questo caso, in coordinate sferiche

$$T = \frac{m}{2}\,(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\,\dot\psi^2), \qquad \Pi = -\frac{\gamma}{r} \quad (\gamma > 0),$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\psi^2}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\right) - \frac{\gamma}{r}$$

e l'equazione che determina V è della forma

$$\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{\mathrm{sen}^2\,\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial\psi}\right)^2\right]\right\} - \frac{\gamma}{r} = h.$$

Poniamo

$$g_1 \equiv p_\psi = \alpha_1, \qquad g_2 \equiv p_\theta^2 + \frac{\alpha_1^2}{\mathrm{sen}^2\,\theta} = \alpha_2,$$

$$g_3 \equiv \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{\alpha_2}{r^2}\right) - \frac{\gamma}{r} = \alpha_3 = h.$$

Allora, dalle formule (24), troviamo

$$\psi - \alpha_1 \int \frac{d\theta}{\mathrm{sen}^2\,\theta\sqrt{\alpha_2 - \dfrac{\alpha_1^2}{\mathrm{sen}^2\,\theta}}} = \beta_1, \tag{26a}$$

$$\int \frac{d\theta}{2\sqrt{\alpha_2 - \dfrac{\alpha_1^2}{\mathrm{sen}^2\,\theta}}} - \int \frac{\dfrac{1}{r^2}\,dr}{2\sqrt{2m\alpha_3 + \dfrac{2m\gamma}{r} - \dfrac{\alpha_2}{r^2}}} = \beta_2, \tag{26b}$$

$$-t + \int \frac{m\,dr}{\sqrt{2m\alpha_3 + \dfrac{2m\gamma}{r} - \dfrac{\alpha_2}{r^2}}} = \beta_3. \tag{26c}$$

Abbiamo ottenuto le equazioni finali per il moto kepleriano.

Nello studio di questo moto, si può assumere, senza perdere di generalità, che la velocità iniziale sia un vettore sul piano del meridiano $\psi = \text{cost}$. Allora al tempo iniziale, $\dfrac{d\psi}{d\theta} = 0$ e dunque dalla formula (26a)

$$\alpha_1 = 0 \tag{27}$$

e $\psi = \beta_1 = \text{cost}$, cioè il moto è piano. Differenziando le equazioni (26b) e (26c) termine a termine, troviamo che la velocità areolare è

$$\frac{1}{2}\,r^2\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{\alpha_2}}{2m} = \text{cost},$$

questo significa che il moto sul piano $\psi = \text{cost}$ si svolge in accordo con la legge delle aree.

Infine, per determinare la traiettoria poniamo $\frac{1}{r} = x$ e dalla (26b), considerando la (27), troviamo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{c+2kx-x^2}} = \beta - \theta,$$

dove

$$c = \frac{2m\alpha_3}{\alpha_2}, \qquad k = \frac{m\gamma}{\alpha_2}, \qquad \beta = 2\sqrt{\alpha_2}\,\beta_2. \tag{28}$$

Calcolando l'integrale otteniamo

$$\arccos \frac{x-k}{\sqrt{k^2+c}} = \theta - \beta$$

e, dunque,

$$x = k + \sqrt{k^2+c}\cos(\theta-\beta).$$

Infine, sapendo che $x = \frac{1}{r}$, per la traiettoria abbiamo un'equazione di una sezione conica, in un fuoco della quale è situato il centro d'attrazione:

$$r = \frac{p}{1+e\cos(\theta-\beta)}, \tag{29}$$

dove il parametro e l'eccentricità della sezione conica sono determinati dalle equazioni

$$p = \frac{1}{k} = \frac{\alpha_2}{m\gamma}, \qquad e = \sqrt{1+\frac{c}{k^2}} = \sqrt{1+\frac{2\alpha_2\alpha_3}{m\gamma^2}}. \tag{30}$$

Un punto può descrivere un'orbita chiusa (il moto di un pianeta attratto dal Sole). Allora questa orbita è un'ellisse tale che un suo fuoco è il centro di attrazione (il Sole).

Denotando con F e a, b ($a > b$) l'area e i semiassi dell'ellisse, troviamo $\left(\text{sapendo che } p = \frac{b^2}{a}\right)$ che

$$\frac{F^2}{a^3} = \frac{\pi^2 a^2 b^2}{a^3} = \pi^2 p.$$

Sia τ il periodo (di rivoluzione), $\tau = \frac{2mF}{\sqrt{\alpha}}$. Allora in base alla (30)

$$\frac{1}{4}\frac{\tau^2}{a^3} = \frac{m^2}{\alpha_2}\frac{F^2}{a^3} = \frac{\pi^2 m^2 p}{\alpha_2} = \frac{\pi^2 m}{\gamma} = \frac{\pi^2}{\gamma_1} \qquad \left(\gamma_1 = \frac{\gamma}{m}\right), \tag{31}$$

dove, in base alla legge della gravitazione di Newton, la quantità γ_1 dipende solamente dal centro di attrazione. Abbiamo ottenuto le tre leggi di Keplero del moto planetario intorno al Sole: 1) i pianeti sono in moto con velocità areolare costante su orbite piane; 2) queste orbite sono ellissi tali che in un fuoco giace il Sole; 3) il rapporto tra il quadrato del periodo orbitale e il cubo dell'asse maggiore dell'orbita è lo stesso per tutti i pianeti.

3. Per illustrare meglio l'applicazione del metodo della separazione delle variabili, consideriamo il caso quando

$$H = \frac{f_1(q_1, p_1) + \ldots + f_n(q_n, p_n)}{g_1(q_1, p_1) + \ldots + g_n(q_n, p_n)}. \tag{32}$$

Allora l'equazione differenziale di base

$$H\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = h$$

può essere scritta come

$$\sum_{i=1}^{n} \left[f_i\left(q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}\right) - h g_i\left(q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}\right) \right] = 0. \tag{33}$$

Poniamo

$$f_i\left(q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}\right) - h g_i\left(q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}\right) = \alpha_i \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{34}$$

dove $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ sono costanti arbitrarie, e la costante α_n, per l'equazione (33) e l'uguaglianza (34), è espressa in funzione di $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, cioè

$$\alpha_n = -\alpha_1 - \ldots - \alpha_{n-1}. \tag{35}$$

Risolviamo la (34) nelle derivate $\frac{\partial V}{\partial q_i}$:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = F_i(q_i, \alpha_i, h) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{36}$$

Si assuma la soluzione della (33) nella forma

$$V = \sum_{i=1}^{n} \int F_i(q_i, \alpha_i, h)\, dq_i. \tag{37}$$

Dunque, un integrale completo dell'equazione di Hamilton — Jacobi ha la forma

$$S = -ht + \sum_{i=1}^{n} \int F_i(q_i, \alpha_i, h)\, dq_i. \tag{38}$$

Allora le equazioni finali del moto (11) sono ottenute dalle seguenti integrazioni:

$$\begin{cases} \int \frac{\partial F_j}{\partial \alpha_j} dq_j - \int \frac{\partial F_n}{\partial \alpha_n} dq_n = \beta_j \quad (j = 1, \ldots, n-1), \\ \sum_{i=1}^{n} \int \frac{\partial F_i}{\partial h} dq_i = t + \beta_n, \\ p_i = F_i(q_i, \alpha_i, h) \quad (i = 1, \ldots, n) \\ (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0). \end{cases} \tag{39}$$

Risolvendo l'equazione $f_i(q_i, p_i) - h g_i(q_i, p_i) = \alpha_i$ per p_i, otteniamo $p_i = F_i(q_i, \alpha_i, h)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Si supponga che la seguente condizione di risolvibilità sia valida: $\frac{\partial f_i}{\partial p_i} - h \frac{\partial g_i}{\partial p_i} \neq$

$\neq 0$. In questo caso le derivate della funzione implicita F_i sono

$$\frac{\partial F_i}{\partial \alpha_i} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial p_i} - h\frac{\partial g_i}{\partial p_i}\right]^{-1}_{p_i = F_i(q_i,\ \alpha_i,\ h)}$$

e

$$\frac{\partial F_i}{\partial h} = \left\{\left[\frac{\partial f_i}{\partial p_i} - h\frac{\partial g_i}{\partial p_i}\right]^{-1} g_i(q_i,\ p_i)\right\}_{p_i = F_i(q_i,\ \alpha_i,\ h)} \quad (i = 1,\ \ldots,\ n).$$

Nella forma finale, le equazioni (39) sono

$$\begin{cases} \displaystyle\int \left[\frac{\partial f_j}{\partial p_j} - h\frac{\partial g_j}{\partial p_j}\right]^{-1}_{p_j = F_j(q_j,\ \alpha_j,\ h)} dq_j - \\ \displaystyle - \int \left[\frac{\partial f_n}{\partial p_n} - h\frac{\partial g_n}{\partial p_n}\right]_{p_n = F_n(q_n,\ \alpha_n,\ h)} dq_n = \beta_j \\ (j = 1,\ \ldots,\ n-1), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \int \left\{\left[\frac{\partial f_i}{\partial p_i} - h\frac{\partial g_i}{\partial p_i}\right]^{-1} g_i(q_i,\ p_i)\right\}_{p_i = F_i(q_i,\ \alpha_i,\ h)} \times \\ \times\, dq_i = t + \beta_n, \\ p_i = F_i(q_i,\ \alpha_i,\ h) \quad (i = 1,\ \ldots,\ n) \\ (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0). \end{cases} \tag{40}$$

Come caso particolare otteniamo il teorema di Liouville.

Se le energie cinetica e potenziale di un sistema hanno rispettivamente la forma

$$T = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)\sum_{i=1}^{n} B_i \dot{q}_i^2, \qquad \Pi = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Pi_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_i}, \tag{41}$$

dove A_i, B_i e Π_i sono funzioni di una variabile q_i ($i = 1,\ \ldots,\ n$), allora le equazioni finali del moto del sistema possono essere ottenute per mezzo di integrazioni.

Infatti, per un sistema di Liouville

$$H = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i^2}{B_i} + 2\Pi_i\right)}{\displaystyle 2\sum_{i=1}^{n} A_i}, \tag{42}$$

ma questo è un caso particolare della formula (32).

§ 28. *Trasformazioni canoniche applicate alla teoria delle perturbazioni*

Conoscendo i moti di un sistema con una data funzione H, sapendo cioè le soluzioni

$$\begin{cases} q_i = \varphi_i(t,\ q_k^0,\ p_k^0), \quad p_i = \psi_i(t,\ q_k^0,\ p_k^0) \\ [q_i^0 = (q_i)_{t=0},\quad p_i^0 = (p_i)_{t=0};\quad i = 1,\ \ldots,\ n] \end{cases} \tag{1}$$

del sistema di equazioni differenziali

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1,\ \ldots,\ n), \tag{2}$$

si richiede di determinare il moto di un sistema « perturbato » con funzione hamiltoniana $H + H_1$, cioè si richiede di determinare le soluzioni del sistema di equazioni differenziali

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial (H + H_1)}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial (H + H_1)}{\partial q_i} \qquad (i = 1,\ \ldots,\ n). \tag{3}$$

Se nelle formule (1) consideriamo q_k^0 e p_k^0 $(k = 1,\ \ldots,\ n)$ come nuove variabili, allora, come è stato delucidato a pag. 140, le formule (1) determinano una trasformazione canonica libera univalente. Questa trasformazione cambia il sistema hamiltoniano (2) in un sistema hamiltoniano con funzione $\widetilde{H} = 0$ (vedi formula (13) di pag. 138)

$$\frac{dq_k^0}{dt} = 0, \qquad \frac{dp_k^0}{dt} = 0 \qquad (k = 1,\ \ldots,\ n) \tag{4}$$

e trasforma il sistema hamiltoniano (3) nel sistema hamiltoniano con funzione $\widetilde{H}$, che sarà uguale a H_1 [1]:

$$\frac{dq_k^0}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial p_k^0}, \qquad \frac{dp_k^0}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial q_k^0} \qquad (k = 1,\ \ldots,\ n). \tag{5}$$

Così, le nuove variabili q_k^0 e p_k^0 possiedono la seguente notevole proprietà: per un moto imperturbato esse conservano valori costanti, che sono uguali ai valori iniziali; per un moto perturbato esse sono funzioni del tempo e dei valori iniziali

$$q_k^{[0]}(t,\ q_j^0,\ p_j^0), \qquad p_k^{[0]}(t,\ q_j^0,\ p_j^0) \qquad (k = 1,\ \ldots,\ n) \tag{6}$$

definite come soluzione generale del sistema hamiltoniano (5), in cui l'« energia di perturbazione » H_1 è una funzione hamiltoniana. Le equazioni finali per il moto perturbato nelle coordinate iniziali q_i, p_i $(i = 1,\ \ldots,\ n)$ si ottengono sostituendo al posto

---

[1] Questo segue dalla relazione $\widetilde{H} - (H + H_1) = 0 - H$. Il membro destro e quello sinistro di questa equazione sono uguali a $\frac{\partial S}{\partial t}$, dove S è la funzione generatrice della trasformazione canonica libera univalente qui considerata (vedi pag. 134).

delle costanti q_k^0 e p_k^0 le funzioni (6) nelle formule del moto non perturbato (1).

Siamo riusciti, attraverso l'uso della teoria delle trasformazioni canoniche, a sostituire l'integrazione del sistema hamiltoniano (3) con l'integrazione dei sistemi hamiltoniani (2) e (5). Otteniamo la soluzione generale del sistema (3) dalle soluzioni generali (1) e (6) di questi sistemi per mezzo della sovrapposizione:

$$\begin{cases} q_i = \varphi_i [t,\ q_k^{[0]}(t,\ q_j^0,\ p_j^0),\quad p_k^{[0]}(t,\ q_j^0,\ p_j^0)], \\ p_i = \psi_i [t,\ q_k^{[0]}(t,\ q_j^0,\ p_j^0),\quad p_k^{[0]}(t,\ q_j^0,\ p_j^0)] \\ \qquad\qquad (i = 1,\ \ldots,\ n). \end{cases} \tag{7}$$

Ora, abbiamo mostrato che la « perturbazione dell'energia » di un sistema è equivalente alla « perturbazione delle condizioni iniziali ». Ciò è illustrato nella fig. 40.

Nell'iperpiano $t = 0$ di uno spazio esteso delle fasi si consideri un punto fissato M_0 e si tracci per esso una traiettoria retti-

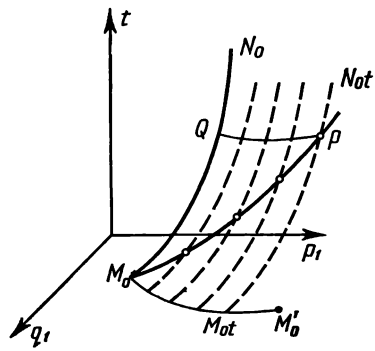


Fig. 40

linea imperturbata, cioè una traiettoria rettilinea (1) per il sistema (2). Nella fig. 40, questa è rappresentata con la linea in grassetto M_0N_0. La linea fine M_0M_0' rappresenta lo spostamento, sull'iperpiano $t = 0$, del punto iniziale, dato dalle funzioni (6). Dal punto M_{0t} di questa curva si tracci una traiettoria rettilinea imperturbata $M_{0t}N_{0t}$ (è rappresentata tratteggiata nella fig. 40). Su questa traiettoria si consideri un punto P con un dato valore della coordinata del tempo t. Questa sarà allora la posizione del sistema nel moto perturbato al tempo t. Nel caso di moto imperturbato, il sistema occupa al tempo t la posizione Q. Dunque, la perturbazione è rappresentata dallo « spostamento » QP. La traiettoria rettilinea in un moto perturbato è rappresentata dalla linea in grassetto M_0P. Così, il moto perturbato può essere rivi-

sto come un moto « composto » nello spazio delle fasi: un punto è in moto lungo una traiettoria rettilinea imperturbata, ma la traiettoria stessa è spostata (nel caso generale è deformata) a causa della « perturbazione » delle condizioni iniziali.

§ 29. *Struttura di una trasformazione canonica arbitraria*

In questo paragrafo, e in quelli seguenti di questo capitolo daremo alcune ulteriori informazioni sulle trasformazioni canoniche.

Per una trasformazione canonica arbitraria è possibile stabilire delle formule che la definiscono con l'aiuto di una funzione generatrice e una valenza c, come è stato fatto nel § 25 per una trasformazione canonica libera.

Per esempio, delle $4n$ quantità

$$q_i,\ p_i,\ \widetilde{q}_i,\ \widetilde{p}_i\ \ (i = 1,\ \ldots,\ n) \tag{1}$$

legate dalle trasformazioni canoniche

$$\widetilde{q}_i = \varphi_i\,(t,\ q_k,\ p_k), \quad \widetilde{p}_i = \psi_i\,(t,\ q_k,\ p_k)$$
$$\left(i = 1,\ \ldots,\ n;\ \frac{\partial\,(\widetilde{q}_1,\ \ldots,\ \widetilde{p}_n)}{\partial\,(q_1,\ \ldots,\ p_n)} \neq 0\right) \tag{2}$$

è possibile considerare le seguenti $2n$ quantità indipendenti:

$$q_1,\ \ldots,\ q_l,\quad p_{l+1},\ \ldots,\ p_n,\quad \widetilde{q}_1,\ \ldots,\ \widetilde{q}_m,\quad \widetilde{p}_{m+1},\ \ldots,\ \widetilde{p}_n$$
$$(0 \leqslant l,\ m \leqslant n). \tag{3}$$

Allora con l'aiuto delle identità

$$\sum_{g=l+1}^{n} p_g\,\delta q_g = \delta\Big(\sum_{g=l+1}^{n} q_g p_g\Big) - \sum_{g=l+1}^{n} q_g\,\delta p_g,$$
$$\sum_{h=m+1}^{n} \widetilde{p}_h\,\delta\widetilde{q}_h = \delta\Big(\sum_{h=m+1}^{n} \widetilde{q}_h\widetilde{p}_h\Big) - \sum_{h=m+1}^{n} \widetilde{q}_h\,\delta\widetilde{p}_h$$

possiamo scrivere l'equazione basilare (9) di pag. 131, nella forma

$$\sum_{j=1}^{m} \widetilde{p}_j\,\delta\widetilde{q}_j - \sum_{h=m+1}^{n} \widetilde{q}_h\,\delta\widetilde{p}_h - \widetilde{H}\,\delta t =$$
$$= c\Big(\sum_{i=1}^{l} p_i\,\delta q_i - \sum_{g=l+1}^{n} q_g\,\delta p_g - H\,\delta t\Big) - \delta U, \tag{4}$$

dove

$$U = F + \sum_{h=m+1}^{n} \widetilde{q}_h\widetilde{p}_h - c\sum_{g=l+1}^{n} q_g p_g. \tag{5}$$

Poiché tutte le $4n$ quantità della (1) sono espresse in funzione delle $2n$ quantità della (3), possiamo assumere che U *sia una funzione delle quantità* (3). *Allora dall'identità* (4) *troviamo*

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = cp_i, \quad \frac{\partial U}{\partial p_g} = -cq_g, \quad \frac{\partial U}{\partial \widetilde{q}_j} = -\widetilde{p}_j, \quad \frac{\partial U}{\partial \widetilde{p}_h} = \widetilde{q}_h \qquad (6)$$

$$(i = 1, \ldots, l;\ g = l+1, \ldots, n;$$

58 $$j = 1, \ldots, m;\ h = m+1, \ldots, n).$$

Le formule (6) sono equivalenti alle formule (2) e determinano la trasformazione canonica considerata con l'aiuto della valenza c e della funzione generatrice U delle quantità indipendenti (3).

Ora dimostreremo un lemma matematico, secondo il quale è sempre possibile scegliere $2n$ quantità indipendenti tra le $4n$ quantità (1) legate dalla trasformazione (2), in modo tale che non ci sia una singola coppia di variabili coniugate q_i, p_i, o $\widetilde{q}_i$, $\widetilde{p}_i$ tra le quantità scelte. Allora, se rinumeriamo appropriatamente le coordinate q_i, $\widetilde{q}_k$ ($i, k = 1, \ldots, n$) e facciamo lo stesso per i momenti p_i, $\widetilde{p}_k$ ($i, k = 1, \ldots, n$) le $2n$ quantità indipendenti scelte possono essere date nella forma (3). Dunque, *per una trasformazione canonica arbitraria esistono delle formule che possono differire dalle formule* (6) *solo nella numerazione delle quantità* (1) [1].

Come è stato fatto nel § 25 per una trasformazione canonica libera, si può dimostrare anche che per una trasformazione canonica arbitraria il determinante di ordine n composto dalle derivate miste del secondo ordine della funzione generatrice U è diverso da zero [2]. Per questa ragione, le prime n equazioni (6) possono essere risolte nelle quantità $\widetilde{q}_j$, $\widetilde{p}_h$ ($j = 1, \ldots, m$; $h = m + 1, \ldots, n$). Dopo aver sostituito l'espressione ottenuta nelle ultime n equazioni (6), possiamo rappresentare le equazioni della trasformazione canonica (6) nella forma (2).

Formuliamo e dimostriamo il lemma che abbiamo usato per ottenere le formule strutturali (6) per una trasformazione canonica arbitraria.

Lemma. *Se sono date* $2n$ *funzioni indipendenti* $\widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_n, \widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_n$ *di* $2n$ *quantità indipendenti* $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$,

[1] Questa proposizione è stata data da Carathéodory nel suo libro *Variationsrechnung und partielle Differentialgliechungen erstes Ordnung*, 2 Aufl., B. I, 1956 (§ 96). Ad ogni modo il lemma su cui la nostra dimostrazione è basata (vedi avanti) è stato stabilito da Carathéodory per il caso particolare in cui il passaggio dalle variabili q_i, p_i alle variabili $\widetilde{q}_i$, $\widetilde{p}_i$ ($i = 1, \ldots, n$) è una trasformazione canonica.

[2] Questa condizione può essere scritta come segue: $\det \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r_i \, \partial \widetilde{r}_k} \right)_{i,k=1}^{n} \neq 0$ se con $r_1, \ldots, r_n, \widetilde{r}_1, \ldots, \widetilde{r}_n$ denotiamo, rispettivamente, le quantità (3) nell'ordine su dato (cfr. la (3)).

allora fra le 4n quantità $q_i, p_i, \tilde{q}_i, \tilde{p}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ *è sempre possibile sceglierne* $2n$ *indipendenti in modo tale che non ci sia tra esse una sola coppia di quantità coniugate* (q_k, p_k) *o* $(\tilde{q}_k, \tilde{p}_k)$.

Dimostrazione. Assumiamo per assurdo l'opposto, cioè che ogni $2n$ quantità fra le $4n$ quantità considerate, tra le quali non esiste una sola coppia di variabili coniugate, siano sempre dipendenti. Allora si scelgono $n + d$ quantità indipendenti tra le $4n$ quantità date in modo tale che le prime n non abbiano il segno $\sim$, e le rimanenti d abbiano questo segno; si scelgono queste $n + d$ quantità in modo che non siano tra loro coniugate e che il numero d abbia il valore più grande possibile. Per assunzione $d < n$.

Dato che, senza alterare le condizioni o il testo del lemma, è possibile intercambiare i ruoli delle due quantità coniugate q_i e p_i o $\tilde{q}_i$ e $\tilde{p}_i$ e anche eseguire una permutazione arbitraria degli indici $1, \ldots, n$ sia delle quantità q_i, p_i che delle quantità $\tilde{q}_i, \tilde{p}_i$, si può assumere che quelle scelte siano le seguenti $n + d$ quantità:

$$q_1, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_d \quad (d < n). \tag{7}$$

Chiameremo le quantità (7) *base massima*. È ovvio che

$$\begin{aligned} \tilde{q}_j &= f(q_1, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_d), \\ \tilde{p}_j &= f(q_1, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_d) \end{aligned} \quad (j = d+1, \ldots, n), \tag{8}$$

dove f è il simbolo funzionale [1].

Senza perdere di generalità, si può assumere che le quantità

$$p_1, \ldots, p_n, \tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_d,$$

che non compaiono nelle formule (8), cioè le quantità

$$p_1, \ldots, p_a, \tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_b \quad (a \leqslant n, \ b \leqslant d) \tag{9}$$

siano funzioni delle quantità della base (7), e che ognuna delle quantità

$$p_{a+1}, \ldots, p_n, \tilde{p}_{b+1}, \ldots, \tilde{p}_d \tag{10}$$

sia indipendente rispetto alla base. Così,

$$\begin{cases} p_i = f(q_1, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_d) & (i = 1, \ldots, a), \\ \tilde{p}_k = f(q_1, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_d) & (k = 1, \ldots, b). \end{cases} \tag{11}$$

Mostreremo ora che le quantità $q_{a+1}, \ldots, q_n, \tilde{q}_{b+1}, \ldots, \tilde{q}_d$, che sono le quantità coniugate delle quantità « indipendenti » (10), ora non appaiono più nel membro destro delle (8). Infatti, q_λ $(\lambda > a)$ compare nell'espressione di una certa $\tilde{q}_j$ $(j > d)$:

$$\tilde{q}_j = f(\ldots, q_\lambda, \ldots).$$

[1] In formule differenti, la stessa lettera f è usata per denotare relazioni funzionali differenti.

Allora il sistema delle quantità $q_1, \ldots, q_{\lambda-1}, q_{\lambda+1}, \ldots, q_n, \widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_d, \widetilde{q}_j$ è *equivalente* alla base (7):

$$(q_1, \ldots, q_{\lambda-1}, q_{\lambda+1}, \ldots, q_n, \widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_d, \widetilde{q}_j) \backsim (q_1, \ldots, q_n, \widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_d), \tag{12}$$

cioè ognuna delle quantità, che appaiono in uno dei due sistemi, è espressa in funzione delle quantità dell'altro sistema, e viceversa [1]. Dunque, le $n + d + 1$ quantità

$$q_1, \ldots, q_{\lambda-1}, p_\lambda, q_{\lambda+1}, \ldots, q_n, \widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_d, \widetilde{q}_j$$

sono indipendenti, ma ciò contraddice il fatto che la base (7) sia « massima ».

Dunque, le formule (8) possono essere scritte come

$$\widetilde{q}_j = f(q_1, \ldots, q_a, \widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_b), \quad \widetilde{p}_j = f(q_1, \ldots, q_a, \widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_b) \quad (j = d+1, \ldots, n). \tag{13}$$

Si denotino con $q_1, \ldots, q_{a_1}, \widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_{b_1}$ $(a_1 \leqslant a,\ b_1 \leqslant b)$ tutte le quantità che attualmente compaiono almeno in uno dei membri destri delle formule (13); allora

$$\widetilde{q}_j = f(q_1, \ldots, q_{a_1}, \widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_{b_1}), \quad \widetilde{p}_j = f(q_1, \ldots, q_{a_1}, \widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_{b_1}) \quad (j = d+1, \ldots, n). \tag{14}$$

Ora mostreremo che le quantità $q_\lambda, \widetilde{q}_\mu$ $(\lambda > a,\ \mu > b)$ non compaiono nelle formule (11), dove $i \leqslant a_1$ e $k \leqslant b_1$. Si assuma il contrario. Supponiamo, per esempio, che q_λ $(\lambda > a)$ sia compresa ora nell'espressione (11) per p_{i_1}, dove $i_1 \leqslant a_1$,

$$p_{i_1} = f(\ldots, q_\lambda, \ldots) \quad (i_1 \leqslant a_1,\ \lambda > a).$$

Ma la quantità q_{i_1} ora compare in una delle espressioni (14), per esempio nell'espressione per $\widetilde{q}_j$ $(j > d)$:

$$\widetilde{q}_j = f(\ldots, q_{i_1}, \ldots) \quad (i_1 \leqslant a_1,\ j > d).$$

Allora

$$(q_1, \ldots, q_{i_1-1}, p_{i_1}, q_{i_1+1}, \ldots, q_{\lambda-1}, q_{\lambda+1}, \ldots, q_n, \widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_d, \widetilde{q}_j) \backsim (q_1, \ldots, q_n, \widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_d) \tag{15}$$

e quindi le $n + d + 1$ quantità

$$q_1, \ldots, q_{i_1-1}, p_{i_1}, q_{i_1+1}, \ldots, q_{\lambda-1}, p_\lambda, q_{\lambda+1}, \ldots, q_n, \widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_d, \widetilde{q}_j$$

sono indipendenti; questa conclusione contraddice la « massimalità » della base (7).

[1] Se ora q_λ appare in qualche relazione funzionale, questa relazione può essere risolta in q_λ.

Così

$$\begin{aligned} &p_{i_1} = f(q_1, \ldots, q_a, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_b), \\ &\tilde{p}_{k_1} = f(q_1, \ldots, q_a, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_b) \\ &(i_1 = 1, \ldots, a_1, \quad k_1 = 1, \ldots, b_1). \end{aligned} \tag{16}$$

Si denotino con $q_{a_1+1}, \ldots, q_{a_2}, \tilde{q}_{b_1+1}, \ldots, \tilde{q}_{b_2}$ quelle quantità $q_i, \tilde{q}_k$ $(i > a_1, k > b_1)$, che attualmente sono presenti nei membri destri delle formule (16). Allora

$$\begin{cases} p_{i_1} = f(q_1, \ldots, q_{a_2}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_2}) \\ (i_1 = 1, \ldots, a_1;\ a_1 \leqslant a_2 \leqslant a), \\ \tilde{p}_{k_1} = f(q_1, \ldots, q_{a_2}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_2}) \\ (k_1 = 1, \ldots, b_1;\ b_1 \leqslant b_2 \leqslant b). \end{cases} \tag{17}$$

Mostreremo ora che le quantità $q_\lambda, \tilde{q}_\mu$ $(\lambda > a, \mu > b)$ attualmente non sono presenti nelle espressioni (11) di $p_i, \tilde{p}_k$, dove $i \leqslant a_2$ e $k \leqslant b_2$. Infatti, supponiamo che le q_λ $(\lambda > a)$ appaiano, per esempio, nell'espressione per p_{i_2} $(a_1 < i_2 \leqslant a_2)$:

$$p_{i_2} = f(\ldots, q_\lambda, \ldots) \quad (a_1 < i_2 \leqslant a_2,\ \lambda > a).$$

Ma la quantità q_{i_2} ora esiste in una delle espressioni (17), per esempio nell'espressione per p_{i_1}. Allora la quantità q_{i_1} esiste in una delle espressioni (14), per esempio nell'espressione per $\tilde{q}_j$ $(j > d)$:

$$\begin{aligned} &p_{i_1} = f(\ldots, q_{i_2}, \ldots) \quad (i_1 \leqslant a_1 < i_2 \leqslant a_2), \\ &\tilde{q}_j = f(\ldots, q_{i_1}, \ldots) \quad (i_1 \leqslant a_1,\ j > d). \end{aligned}$$

In questo caso è stabilita un'equivalenza tra il sistema delle quantità

$$\begin{gathered} q_1, \ldots, q_{i_1-1}, p_{i_1}, q_{i_1+1}, \ldots, q_{i_2-1}, p_{i_2}, q_{i_2+1}, \ldots, q_{\lambda-1}, \\ q_{\lambda+1}, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_d, \tilde{q}_j \end{gathered} \tag{18}$$

e la base (7). Per questa ragione, la quantità p_λ è indipendente dalle quantità (18). Aggiungendo p_λ alle quantità (18) otteniamo una base di $n + d + 1$ quantità, la qual cosa è impossibile.

Così,

$$\begin{aligned} &p_{i_2} = f(q_1, \ldots, q_a, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_b), \\ &\tilde{p}_{k_2} = f(q_1, \ldots, q_a, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_b) \\ &(i_2 = a_1 + 1, \ldots, a_2, \ k_2 = b_1 + 1, \ldots, b_2). \end{aligned} \tag{19}$$

Denotiamo con $q_{a_2+1}, \ldots, q_{a_3}, \tilde{q}_{b_2+1}, \ldots, \tilde{q}_{b_3}$ quelle quantità tra le $q_i, \tilde{q}_k$ $(i > a_2, k > b_2)$ che attualmente compaiono nelle

formule (19). Allora le (19) possono essere scritte come

$$\begin{cases} p_{i_2} = f(q_1, \ldots, q_{a_3}, \widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_{b_3}) \\ (i_2 = a_1 + 1, \ldots, a_2;\ a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a), \\ \widetilde{p}_{k_2} = f(q_1, \ldots, q_{a_3}, \widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_{b_3}) \\ (k_2 = b_1 + 1, \ldots, b_2;\ b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3 \leqslant b). \end{cases} \tag{20}$$

Questo processo può essere iterato finché le uguaglianze $a_s = a_{s+1}$, $b_s = b_{s+1}$ vengono verificate simultaneamente; allora

$$\begin{cases} p_{i_s} = f(q_1, \ldots, q_{a_s}, \widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_{b_s}) \\ (i_s = a_{s-1} + 1, \ldots, a_s;\ a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_s \leqslant a), \\ \widetilde{p}_{k_s} = f(q_1, \ldots, q_{a_s}, \widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_{b_s}) \\ (k_s = b_{s-1} + 1, \ldots, b_s;\ b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_s \leqslant b). \end{cases} \tag{21}$$

Al posto delle formule (14), (17), (20), (21) possiamo scrivere

$$\widetilde{q}_j = f(q_1, \ldots, q_{a_s}, \widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_{b_s}) \quad (j = d+1, \ldots, n), \tag{22}$$

$$\widetilde{p}_j = f(q_1, \ldots, q_{a_s}, \widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_{b_s})$$

$$p_{i_s} = f(q_1, \ldots, q_{a_s}, \widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_{b_s}) \quad (i = 1, \ldots, a_s), \tag{23}$$

$$\widetilde{p}_k = f(q_1, \ldots, q_{a_s}, \widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_{b_s}) \quad (k = 1, \ldots, b_s). \tag{24}$$

Sia ora $a_s > b_s$. Allora dalle formule (23) possiamo eliminare $\widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_{b_s}$ e ottenere una relazione tra q_i e p_i; ma questo contraddice l'ipotesi del lemma.

Se $a_s \leqslant b_s$, allora $a_s < b_s + 1$. Allora dalle formule (22) e (24) possiamo eliminare tutte le q_i e ottenere una relazione tra $\widetilde{q}_k$ e $\widetilde{p}_k$; questo contraddice di nuovo l'ipotesi.

Dunque, l'assunzione che esista una base massima (7) in cui $d < n$ ci ha condotto ad una contraddizione. Il lemma è così dimostrato.

§ 30. *Criterio di canonicità di una trasformazione. Parentesi di Lagrange*

Stabiliamo alcune prove per dimostrare il carattere canonico di una trasformazione, cioè le condizioni necessarie e sufficienti che debbono essere soddisfatte dalle $2n$ funzioni indipendenti (rispetto a q_k, p_k $(k = 1, \ldots, n)$)

$$\widetilde{q}_i = \varphi_i(t, q_k, p_k), \quad \widetilde{p}_i = \psi_i(t, q_k, p_k) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

perché la trasformazione definita da queste funzioni sia canonica.

Sia canonica la trasformazione (1). Scriviamo l'identità che la definisce:

$$\sum_{i=1} \tilde{p}_i \delta \tilde{q}_i - \tilde{H} \delta t = c \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H \delta t \right) - \delta F (t, q_i, p_i). \quad (2)$$

Consideriamo un arbitrario valore fissato $t = \bar{t}$. Allora dall'identità (2) otteniamo

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \delta \tilde{q}_i = c \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - \delta F (\bar{t}, q_i, p_i). \quad (3)$$

Ma la (3) è un'identità per una trasformazione che non contiene esplicitamente il tempo,

$$\tilde{q}_i = \varphi_i (t, q_k, p_k), \quad \tilde{p}_i = \psi_i (\bar{t}, q_k, p_k) \quad (i = 1, \ldots, n). \quad (4)$$

Quindi, le formule (4) definiscono una trasformazione canonica con valenza c che è indipendente dal valore scelto per $t = \bar{t}$.

Al contrario, sia ora supposto che tutte le trasformazioni ottenute dalla trasformazione (1) sostituendo la variabile t con i vari valori fissati $\bar{t}$ siano canoniche e con una stessa valenza c. Allora, definendo la funzione $\tilde{H}$ dall'equazione

$$\tilde{H} = cH + \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1} \tilde{p}_i \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial t}, \quad (5)$$

otteniamo l'equazione (2) dalle equazioni (3) e (5), cioè troviamo che la trasformazione (1), che dipende dal tempo t, è canonica.

Così, *perché la trasformazione* (1) *dipendente dal tempo sia canonica, è necessario e sufficiente che tutte le trasformazioni indipendenti dal tempo, ottenute dalla trasformazione* (1) *sostituendo t con un valore arbitrario* $\bar{t}$, *siano canoniche ed abbiano una stessa valenza c.*

Per questa ragione, per stabilire le prove per il carattere canonico, possiamo limitarci alle trasformazioni canoniche che non contengono esplicitamente la variabile tempo t:

$$\tilde{q}_i = \varphi_i (q_k, p_k), \quad \tilde{p}_i = \psi_i (q_k, p_k) \quad \left(i = 1, \ldots, n; \frac{\partial (\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{p}_n)}{\partial (q_1, \ldots, p_n)} \neq 0 \right). \quad (6)$$

Per la trasformazione canonica (6) l'identità definita (2) è scritta come

$$\sum_{k=1}^{n} \tilde{p}_k \delta \tilde{q}_k = c \sum_{k=1}^{n} p_k \delta q_k - \delta K (q_k, p_k). \quad (7)$$

Qui, si esprimono le $\delta\widetilde{q}_k$ in funzione di δq_i e δp_i usando le formule (1). Allora la (7) assumerà la forma

$$\sum_{i=1}^{n} (\Phi_i\,\delta q_i + \Psi_i\,\delta p_i) = -\delta K(q_k,\ p_k), \tag{8}$$

dove

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{p}_k \frac{\partial \widetilde{q}_k}{\partial q_i} - cp_i, \qquad \Psi_i = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{p}_k \frac{\partial \widetilde{q}_k}{\partial p_i} \quad (i = 1,\ \ldots,\ n). \tag{8'}$$

Rimangono da scrivere le condizioni affinché il membro sinistro della (8) sia un differenziale completo per avere dunque una prova per il carattere canonico in forma di uguaglianza

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial \Psi_i}{\partial p_k} = \frac{\partial \Psi_k}{\partial p_i}, \qquad \frac{\partial \Phi_i}{\partial p_k} = \frac{\partial \Psi_k}{\partial q_i} \quad (i,\ k = 1,\ \ldots,\ n). \tag{9}$$

Sostituendo le espressioni (8') in queste uguaglianze troviamo (dopo elementari trasformazioni)

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \widetilde{q}_j}{\partial q_i} \frac{\partial \widetilde{p}_j}{\partial q_k} - \frac{\partial \widetilde{q}_j}{\partial q_k} \frac{\partial \widetilde{p}_j}{\partial q_i} \right) = 0, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \widetilde{q}_j}{\partial p_i} \frac{\partial \widetilde{p}_j}{\partial p_k} - \frac{\partial \widetilde{q}_j}{\partial p_k} \frac{\partial \widetilde{p}_j}{\partial p_i} \right) = 0, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \widetilde{q}_j}{\partial q_i} \frac{\partial \widetilde{p}_j}{\partial p_k} - \frac{\partial \widetilde{q}_j}{\partial p_k} \frac{\partial \widetilde{p}_j}{\partial q_i} \right) = c\delta_{ik} \quad (i,\ k = 1,\ \ldots,\ n), \end{cases} \tag{10}$$

dove δ_{ik} è il simbolo di Kronecker: $\delta_{ik} = 0$ per $i \neq k$; $\delta_{ik} = 1$ per $i = k$ $(i,\ k = 1,\ \ldots,\ n)$. Le condizioni (10) possono essere scritte in forma compatta se introduciamo la cosiddetta *parentesi di Lagrange*, che per le $2n$ funzioni date φ_i, ψ_i $(i = 1,\ \ldots,\ n)$ delle due variabili q e p è definita come segue [1]:

$$[q\,p] = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial q} \frac{\partial \psi_j}{\partial p} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial p} \frac{\partial \psi_j}{\partial q} \right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (\varphi_j,\ \psi_j)}{\partial (q,\ p)}. \tag{11}$$

Usando questa notazione e considerando al posto delle φ_i, ψ_i le funzioni $\widetilde{q}_i$, $\widetilde{p}_i$ $(i = 1,\ \ldots,\ n)$ definite dalle formule (6),

[1] Il lettore può confrontare la parentesi di Lagrange con la parentesi di Poisson introdotta nel § 15. Lì, le due funzioni φ, ψ sono date nelle $2n$ variabili q_i, p_i e la parentesi di Poisson equivale alla somma degli jacobiani $\dfrac{\partial (\varphi,\ \psi)}{\partial (q_i,\ p_i)}$. Qui invece le $2n$ funzioni sono date nei due argomenti e la parentesi di Lagrange è uguale alla somma degli jacobiani (11).

possiamo scrivere le condizioni (10) come segue:

$$[q_i\ q_k] = 0,\ [p_i\ p_k] = 0,\ [q_i\ p_k] = c\delta_{ik}\ (i, k = 1, \ldots, n), \quad (12)$$

dove c è la valenza della trasformazione canonica.

Le uguaglianze (12) esprimono le condizioni necessarie e sufficienti perché la trasformazione (6) sia canonica. Nel caso di una trasformazione dipendente dal tempo t, le condizioni (12) si conservano e devono essere valide per qualunque valore di t.

§ 31. *Natura simpliciale della matrice jacobiana di una trasformazione canonica*

Consideriamo la matrice jacobiana della trasformazione canonica

$$\boldsymbol{M} = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial \widetilde{q}_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \widetilde{q}_1}{\partial q_n} & \frac{\partial \widetilde{q}_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial \widetilde{q}_1}{\partial p_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \widetilde{q}_n}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \widetilde{q}_n}{\partial q_n} & \frac{\partial \widetilde{q}_n}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial \widetilde{q}_n}{\partial p_n} \\ \frac{\partial \widetilde{p}_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \widetilde{p}_1}{\partial q_n} & \frac{\partial \widetilde{p}_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial \widetilde{p}_1}{\partial p_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \widetilde{p}_n}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \widetilde{p}_n}{\partial q_n} & \frac{\partial \widetilde{p}_n}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial \widetilde{p}_n}{\partial p_n} \end{matrix} \right\| = \begin{pmatrix} \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{q}}}{\partial \boldsymbol{q}} & \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{q}}}{\partial \boldsymbol{p}} \\ \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{p}}}{\partial \boldsymbol{q}} & \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{p}}}{\partial \boldsymbol{p}} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Qui $\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{q}}}{\partial \boldsymbol{q}}$ è una matrice jacobiana di ordine $n \left\| \frac{\partial \widetilde{q}_i}{\partial q_k} \right\|$. Analogamente, definiamo le matrici jacobiane di ordine n $\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{q}}}{\partial \boldsymbol{p}}$, $\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{p}}}{\partial \boldsymbol{q}}$ e $\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{p}}}{\partial \boldsymbol{p}}$.

Introduciamo una matrice particolare di ordine $2n$:

$$\boldsymbol{J} = \left\| \begin{matrix} 0 & \ldots & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & -1 \\ 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \right\| = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{E} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

dove $\boldsymbol{E}$ è una matrice unitaria di ordine n. Si consideri la matrice $\boldsymbol{M}$ e la sua trasposta $\boldsymbol{M}'$; si formi il prodotto $\boldsymbol{M}'\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}$ e si dimostri, in virtù della soluzione (12) del paragrafo precedente, che questo prodotto è identicamente uguale a $c\boldsymbol{J}$:

$$\boldsymbol{M}'\boldsymbol{J}\boldsymbol{M} = c\boldsymbol{J}, \quad (3)$$

dove c è la valenza della trasformazione canonica.

Infatti [1],

$$M'J = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \widetilde{q}}{\partial q}\right)' & \left(\frac{\partial \widetilde{p}}{\partial q}\right)' \\ \left(\frac{\partial \widetilde{q}}{\partial p}\right)' & \left(\frac{\partial \widetilde{p}}{\partial p}\right)' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \widetilde{p}}{\partial q}\right)' - \left(\frac{\partial \widetilde{q}}{\partial q}\right)' \\ \left(\frac{\partial \widetilde{p}}{\partial p}\right)' - \left(\frac{\partial \widetilde{q}}{\partial p}\right)' \end{pmatrix},$$

$$M'JM = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \widetilde{p}}{\partial q}\right)' \frac{\partial \widetilde{q}}{\partial q} - \left(\frac{\partial \widetilde{q}}{\partial q}\right)' \frac{\partial \widetilde{p}}{\partial q} & \left(\frac{\partial \widetilde{p}}{\partial q}\right)' \frac{\partial \widetilde{q}}{\partial p} - \left(\frac{\partial \widetilde{q}}{\partial q}\right)' \frac{\partial \widetilde{p}}{\partial p} \\ \left(\frac{\partial \widetilde{p}}{\partial p}\right)' \frac{\partial \widetilde{q}}{\partial q} - \left(\frac{\partial \widetilde{q}}{\partial p}\right)' \frac{\partial \widetilde{p}}{\partial q} & \left(\frac{\partial \widetilde{p}}{\partial p}\right)' \frac{\partial \widetilde{q}}{\partial p} - \left(\frac{\partial \widetilde{q}}{\partial p}\right)' \frac{\partial \widetilde{p}}{\partial p} \end{pmatrix}.$$

Ma

$$\left(\frac{\partial \widetilde{p}}{\partial q}\right)' \frac{\partial \widetilde{q}}{\partial q} - \left(\frac{\partial \widetilde{q}}{\partial q}\right)' \frac{\partial \widetilde{p}}{\partial q} = \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{p}_j}{\partial q_i} \frac{\partial \widetilde{q}_j}{\partial q_k} - \frac{\partial \widetilde{q}_j}{\partial q_i} \frac{\partial \widetilde{p}_j}{\partial q_k} \right\|_{i,\,k=1}^{n} =$$

$$= \| [q_i \; q_k] \| = 0.$$

Eseguendo dei calcoli analoghi per i rimanenti blocchi, otteniamo

$$M'JM = \begin{pmatrix} 0 & -cE \\ cE & 0 \end{pmatrix} = cJ,$$

come volevasi dimostrare.

Per una trasformazione canonica univalente, l'equazione (3) è scritta come

$$M'JM = J. \tag{4}$$

Le matrici M, per cui l'equazione (4) è valida, sono dette *simpliciali*. Poiché $\det J = 1$, e il determinante di un prodotto di matrici è uguale al prodotto dei determinanti, dalle (4) troviamo che

$$\det M = \pm 1.$$

Dunque, le matrici simpliciali sono non singolari [2].

---

[1] Quando gli elementi della matrice sono blocchi di matrice, la moltiplicazione è effettuata secondo le stesse regole di quando gli elementi di matrice sono numeri, cioè le righe della prima matrice sono moltiplicate per le colonne della seconda matrice (vedi, per esempio, F.R. Gantmacher, *Teoria delle matrici*, § 5).

[2] Come può essere rapidamente verificato, il prodotto di due matrici simpliciali, la matrice inversa di qualunque matrice simpliciale e la matrice unitaria sono ancora matrici simpliciali. Dunque, le matrici simpliciali formano un gruppo, un *gruppo simpliciale*.

Le matrici simpliciali sono caratterizzate dalla seguente proprietà. Nella forma bilineare $f = \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i' - y_i x_i')$, sottoponiamo le $2n$ variabili x_i, y_i e le $2n$ variabili x_i', y_i' ad una stessa trasformazione lineare con la matrice simpliciale di coefficienti M. Allora la forma f mantiene il suo aspetto nelle nuove variabili x_i^*, y_i^* e $x_i^{*\prime}$, $y_i^{*\prime}$: $f = \sum_{i=1}^{n} (x_i^* y_i^{*\prime} - y_i^* x_i^{*\prime})$.

Chiameremo la matrice M che soddisfa la relazione (3) una matrice *simpliciale generalizzata* (con valenza c) [1].

Poiché le relazioni (12) del paragrafo precedente riconducono alla condizione di natura simpliciale generalizzata della matrice jacobiana M, segue che **il criterio di canonicità** di una trasformazione si può così stabilire:

Affinché una certa trasformazione $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(t, q_k, p_k)$, $\widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i(t, q_k, p_k)$ $(i = 1, \ldots, n)$ *sia canonica, è necessario e sufficiente che la matrice jacobiana* M *corrispondente a questa trasformazione sia simpliciale generalizzata con valenza costante* c. (*Nel caso di una trasformazione univalente, la matrice* M *è un'ordinaria matrice simpliciale.*) *Allora, la condizione di natura simpliciale della* (3) *deve valere identicamente rispetto a tutte le variabili* t, q_i, p_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Nel § 26 è stato stabilito che il moto di un qualunque sistema hamiltoniano può essere rivisto come una trasformazione canonica libera univalente. Segue che la sua matrice jacobiana è simpliciale e ha determinante I (vedi pagg. 125-126) uguale a ± 1.

Poiché al tempo iniziale $I(0) = +1$, allora $I = +1$ in tutti gli istanti seguenti, ma allora è proprio questo determinante che viene usato come integrando nell'espressione del volume delle fasi in uno spazio a $2n$ dimensioni (formula (3), § 23). Questa osservazione può essere rivista come una dimostrazione del teorema di Liouville diversa dalla dimostrazione data nel § 23.

§ 32. *Invarianza della parentesi di Poisson in una trasformazione canonica*

Diamo la condizione di canonicità di una trasformazione espressa nella forma dell'equazione (3) del paragrafo precedente in forma leggermente modificata. Moltiplicando ambo i membri di questa equazione per $(M')^{-1}$ a sinistra e per M^{-1} a destra otteniamo

$$(M')^{-1} J M^{-1} = \frac{1}{c} J. \tag{1}$$

Consideriamo le matrici inverse di entrambi i membri dell'equazione notando che $J^{-1} = -J$ [2]:

$$M J M' = cJ. \tag{2}$$

---

[1] Tutte le matrici simpliciali generalizzate (per tutte le $c \neq 0$) formano un gruppo. Se M è una matrice simpliciale generalizzata, allora $\det M = \pm c^n$.

[2] Qui usiamo la seguente regola: la matrice inversa di un prodotto di matrici è uguale al prodotto delle matrici inverse in ordine invertito: $(ABC)^{-1} = C^{-1} B^{-1} A^{-1}$. Inoltre,

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = -JJ^{-1},$$

cioè $J^{-1} = -J$.

L'uguaglianza $MJM' = cJ$ è ottenuta dall'uguaglianza $M'JM = cJ$ sostituendo la matrice jacobiana M con la sua trasposta M'. Ma questa sostituzione (vedi formula (1), § 31) si riduce a sostituire le derivate $\frac{\partial \widetilde{q}_i}{\partial q_k}$, $\frac{\partial \widetilde{q}_i}{\partial p_k}$, $\frac{\partial \widetilde{p}_i}{\partial q_k}$, $\frac{\partial \widetilde{p}_i}{\partial p_k}$ rispettivamente con le derivate $\frac{\partial \widetilde{q}_k}{\partial q_i}$, $\frac{\partial \widetilde{p}_k}{\partial q_i}$, $\frac{\partial \widetilde{q}_k}{\partial p_i}$, $\frac{\partial \widetilde{p}_k}{\partial p_i}$, in altre parole, in ogni derivata le lettere e gli indici sopra e sotto [1] sono tra loro cambiati. Così, se l'equazione $M'JM = cJ$ era equivalente al sistema di uguaglianze

$$[q_i\ q_k] = 0, \quad [p_i\ p_k] = 0, \quad [q_i\ p_k] = c\delta_{ik}\ (i,\ k = 1,\ \ldots,\ n), \quad (3)$$

allora l'equazione (2) sarà equivalente al sistema di uguaglianze

$$[q_i\ q_k]^* = 0, \quad [p_i\ p_k]^* = 0, \quad [q_i\ p_k]^* = \delta_{ik} \quad (i,\ k = 1,\ \ldots,\ n), \quad (4)$$

dove l'asterisco * indica che lo scambio summenzionato di derivate deve essere eseguito dentro la parentesi di Lagrange. Ma allora la parentesi di Lagrange diventa parentesi di Poisson. Infatti

$$[q_i\ q_k]^* = \Big[\sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{\partial \widetilde{q}_j}{\partial q_i}\frac{\partial \widetilde{p}_j}{\partial q_k} - \frac{\partial \widetilde{p}_j}{\partial q_i}\frac{\partial \widetilde{q}_j}{\partial q_k}\Big)\Big]^* =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{\partial \widetilde{q}_i}{\partial q_j}\frac{\partial q_k}{\partial p_j} - \frac{\partial \widetilde{q}_i}{\partial p_j}\frac{\partial q_k}{\partial q_j}\Big) = (\widetilde{q}_i\ q_k),$$

dove $(q_i\ \widetilde{q}_k)$ è la parentesi di Poisson delle funzioni q_i e q_k rispetto alle variabili indipendenti $q_1,\ p_1,\ \ldots,\ q_n,\ p_n$. Analogamente,

$$p_i\ p_k]^* = (\widetilde{p}_i\ \widetilde{p}_k), \quad q_i\ p_k]^* = (q_i\ p_k).$$

Dunque, *le condizioni di canonicità della trasformazione* (4) *possono essere scritte nella seguente forma con l'aiuto della parentesi di Poisson*:

$$(q_i\ q_k) = 0, \quad (p_i\ p_k) = 0, \quad (\widetilde{q}_i\ \widetilde{p}_k) = c\delta_{ik} \quad i,\ k = 1,\ \ldots,\ n). \quad (5)$$

Si considerino due funzioni φ e ψ delle quantità q_i, p_i $(i = 1,\ \ldots,\ n)$ e t. Esprimendo in queste funzioni le q_i e p_i in funzione di $\widetilde{q}_k$ e $\widetilde{p}_k$ $(k = 1,\ \ldots,\ n)$ con l'aiuto di una trasformazione canonica inversa, possiamo rivedere queste stesse funzioni come funzioni delle variabili $\widetilde{q}_k$, $\widetilde{p}_k$ $(k = 1,\ \ldots,\ n)$. In accordo a ciò, la parentesi di Poisson di φ e ψ può essere calcolata sia rispetto alle variabili q_i, p_i (denotata con $(\varphi\ \psi)$) sia rispetto alle variabili $\widetilde{q}_i$, $\widetilde{p}_i$ (denotata con $(\varphi\ \psi)^{\sim}$).

---

[1] Come prima, il segno $\sim$ rimane a numeratore.

Dimostriamo la validità dell'identità

$$(\varphi\,\psi) = c\,(\varphi\,\psi)^{\sim}. \tag{6}$$

La dimostrazione di questa identità si basa su un'espressione familiare dello jacobiano di un sistema di funzioni composte

$$\frac{\partial(\varphi,\,\psi)}{\partial(q_j,\,p_j)} = \sum_{\substack{i,\,k=1\\ i<k}}^{n} \left[\frac{\partial(\varphi,\,\psi)}{\partial(\tilde{q}_i,\,\tilde{q}_k)}\frac{\partial(\tilde{q}_i,\,\tilde{q}_k)}{\partial(q_j,\,p_j)} + \frac{\partial(\varphi,\,\psi)}{\partial(\tilde{p}_i,\,\tilde{p}_k)}\frac{\partial(\tilde{p}_i,\,\tilde{p}_k)}{\partial(q_j,\,p_j)}\right] +$$

$$+ \sum_{i,\,k=1}^{n} \frac{\partial(\varphi,\,\psi)}{\partial(\tilde{q}_i,\,\tilde{p}_k)}\frac{\partial(\tilde{q}_i,\,\tilde{p}_k)}{\partial(q_j,\,p_j)} \quad (j=1,\,\ldots,\,n).$$

Sommando questa identità termine a termine, otteniamo

$$(\varphi\,\psi) = \sum_{\substack{i,\,k=1\\ i<k}}^{n} \left[\frac{\partial(\varphi,\,\psi)}{\partial(\tilde{q}_i,\,\tilde{q}_k)}(\tilde{q}_i\,\tilde{q}_k) + \frac{\partial(\varphi,\,\psi)}{\partial(\tilde{p}_i,\,\tilde{p}_k)}(\tilde{p}_i\,\tilde{p}_k) +\right.$$

$$\left. + \sum_{i,\,k=1}^{n} \frac{\partial(\varphi,\,\psi)}{\partial(\tilde{q}_i,\,\tilde{p}_k)}(\tilde{q}_i\,\tilde{p}_k)\right.$$

Da questo, usando le uguaglianze (5), troviamo

$$(\varphi\,\psi) = c\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(\varphi,\,\psi)}{\partial(\tilde{q}_j,\,\tilde{p}_j)} = c\,(\varphi\,\psi)^{\sim}. \tag{7}$$

L'asserzione inversa è ancora vera. Se per ogni coppia di funzioni φ e ψ è soddisfatta l'identità (7) per una stessa costante $c \neq 0$, allora il passaggio dalle $2n$ variabili q_i, p_i alle $2n$ variabili $\tilde{q}_i$, $\tilde{p}_i$ è ottenuto da una trasformazione canonica con valenza c [1].

Per una trasformazione canonica univalente $c = 1$, e dunque

$$(\varphi\,\psi) = (\varphi\,\psi)^{\sim}.$$

In altre parole, *la parentesi di Poisson è invariante per trasformazioni canoniche univalenti*. Questa proprietà delle trasformazioni canoniche univalenti individua queste trasformazioni tra tutte le possibili trasformazioni dello spazio delle fasi.

---

[1] Infatti, dalla (7) segue che

$$(\tilde{q}_i\,\tilde{q}_k) = c\,(\tilde{q}_i\,\tilde{q}_k)^{\sim} = 0, \quad (\tilde{p}_i\,\tilde{p}_k) = c\,(\tilde{p}_i\,\tilde{p}_k)^{\sim} = 0,$$
$$(\tilde{q}_i\,\tilde{p}_k) = c\,(\tilde{q}_i\,\tilde{p}_k)^{\sim} = c\delta_{ik}.$$

V. Stabilità dell'equilibrio e moti di un sistema

§ 33. *Teorema di Lagrange sulla stabilità di una posizione di equilibrio*

Cominciamo col definire una posizione di equilibrio.

Innanzitutto si ricordi [1] che una posizione di un sistema è detta di equilibrio se il sistema, che al tempo iniziale era in quella posizione con velocità nulla, rimane in quella posizione.

Sia la posizione di un sistema olonomo definita dalle coordinate indipendenti $q_1, \ldots, q_n$ (dove n è il numero dei gradi di libertà del sistema). Come è stato spiegato nel § 5, in una posizione di equilibrio (e solo in questa posizione) tutte le forze generalizzate sono nulle: $Q_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ [2]. Senza perdere di generalità, possiamo considerare che la posizione del sistema qui studiata è nell'origine delle coordinate $q_1 = \ldots = q_n = 0$. Allora le coordinate di qualsiasi altra posizione del sistema $q_1, \ldots, q_n$ caratterizzano uno spostamento di questa posizione dalla posizione di equilibrio e per questa ragione sono dette *deviazioni* del sistema.

La posizione di equilibrio $q_1 = \ldots = q_n = 0$ (o stato di equilibrio $q_1 = \ldots = q_n = 0, \dot{q}_1 = \ldots = \dot{q}_n = 0$) è detta *stabile* se per deviazioni iniziali q_k^0 sufficientemente piccole e velocità iniziali $\dot{q}_i^0$ $(i = 1, \ldots, n)$ sufficientemente piccole il sistema non supera i limiti di un intorno arbitrariamente piccolo (preassegnato!) della posizione di equilibrio durante l'intero periodo del moto e ha velocità arbitrariamente piccole $\dot{q}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, cioè, se *per qualunque* $\varepsilon > 0$ *è possibile individuare un* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *tale che per ogni* $t \geqslant t_0$ *le disuguaglianze*

$$|q_i(t)| < \varepsilon, \quad |\dot{q}_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

---

[1] Vedi § 4.

[2] Se le forze generalizzate Q_i dipendono non solo dalle coordinate q_k ma anche dalle velocità generalizzate $\dot{q}_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, allora le uguaglianze $Q_i = 0$ devono essere vere quando le coordinate q_k, che compaiono nell'espressione per Q_i, sono sostituite dalle coordinate di una posizione di equilibrio, e le velocità generalizzate sono assunte uguali a zero.

siano verificate purché al tempo iniziale $t = t_0$

$$|q_i^0| < \delta, \quad |\dot{q}_i^0| < \delta \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Conviene interpretare le disuguaglianze (1) e (2) geometricamente in uno spazio degli stati a $2n$ dimensioni $(q_i, \dot{q}_i)$. Per il caso di $n = 1$, la fig. 41 rappresenta, nel piano $(q, \dot{q})$, due intorni dell'origine delle coordinate O che corrispondono alle disuguaglian-

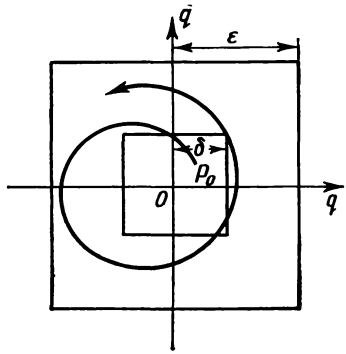


Fig. 41

ze (1) e (2). Se l'origine O è uno stato di equilibrio stabile e per un dato $\varepsilon > 0$ è scelto un $\delta > 0$ adatto, allora qualunque moto che inizia al tempo t_0 dentro il quadrato di centro O e lato 2δ si svolge per tutto il tempo dentro quel quadrato con lato 2ε.

Esempio 1. *Una palla pesante può muoversi lungo un bordo di forma circolare e localizzato in un piano verticale.* Ci sono due posizioni di equilibrio: il punto più alto e quello più basso della circonferenza. Il secondo è la posizione di equilibrio stabile mentre il primo è una posizione di equilibrio instabile.

Esempio 2. *Un oscillatore lineare.* La posizione di equilibrio è stabile. Infatti, per un oscillatore lineare $T = \frac{1}{2} m\dot{q}^2$, $\Pi = \frac{1}{2} cq^2$ $(m > 0, c > 0)$, e l'equazione differenziale del moto $m\ddot{q} + cq = 0$ ha la soluzione generale

$$q = q_0 \cos \omega (t - t_0) + \frac{\dot{q}_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega (t - t_0) \qquad \left(\omega^2 = \frac{c}{m}\right).$$

Dunque,

$$|q(t)| \leqslant |q_0| + \frac{1}{\omega} |\dot{q}_0| < \varepsilon, \qquad |\dot{q}(t) \leqslant \omega |q_0| + |\dot{q}_0| < \varepsilon$$

solo se $|q_0| < \delta$, $|\dot{q}_0| < \delta$, dove, per esempio, $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{2\omega}, \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)$.

Esempio 3. *Una particella di massa m può muoversi lungo l'asse x sotto l'azione di due forze: una forza agente proporzionale alla deviazione* $-cx$,

e una forza resistente del mezzo, che è proporzionale alla prima potenza della velocità $-2f\dot{x}$ $(c > 0,\ f > 0)$.

Il punto $x = 0$ sarà una posizione di equilibrio stabile. Dapprima consideriamo il caso in cui il coefficiente della forza di resistenza sia piccolo: $0 < f < \sqrt{mc}$. Allora l'equazione differenziale del moto $m\ddot{x} + 2f\dot{x} + cx = 0$ ha la soluzione generale

$$x = e^{-\frac{f}{m}(t-t_0)}\left[C_1 \cos\frac{d}{m}(t-t_0) + C_2 \operatorname{sen}\frac{d}{m}(t-t_0)\right],$$

dove

$$d = \sqrt{mc-f^2}, \quad C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{1}{d}(fx_0 + m\dot{x}_0).$$

Per questo, per ogni valore di t,

$$|x(t)| \leqslant |C_1| + |C_2| \leqslant \left(1+\frac{f}{d}\right)|x_0| + \frac{m}{d}|\dot{x}_0| < \varepsilon$$

e

$$|\dot{x}(t)| \leqslant \frac{d}{m}\left(1+\frac{f}{d}\right)(|C_1| + |C_2|) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{d}{m}\left(1+\frac{f}{d}\right)^2 |x_0| + \left(1+\frac{f}{d}\right)|\dot{x}_0| < \varepsilon$$

supposto che $|x_0| < \delta$ e $|\dot{x}_0| < \delta$, dove, per esempio,

$$\delta = \min\left[\frac{d\varepsilon}{2m},\ \frac{m\varepsilon}{2d\left(1+\frac{f}{d}\right)^2}\right].$$

Ma se $f \geqslant \sqrt{mc}$, allora la soluzione generale dell'equazione differenziale del moto $m\ddot{x} + 2f\dot{x} + cx = 0$ ha la forma

$$x = C_1 e^{-\nu_1(t-t_0)} + C_2 e^{-\nu_2(t-t_0)},$$

dove

$$\nu_{1,2} = \frac{f \pm \sqrt{f^2-mc}}{m} > 0, \quad C_1 = \frac{\nu_2 x_0 + \dot{x}_0}{\nu_2 - \nu_1}, \quad C_2 = \frac{\nu_1 x_0 + \dot{x}_0}{\nu_1 - \nu_2}.$$

Da questa deriva, per ogni valore di t,

$$|x(t)| \leqslant |C_1| + |C_2| \leqslant \frac{(\nu_1+\nu_2)|x_0| + 2|\dot{x}_0|}{|\nu_2-\nu_1|} = \frac{f|x_0| + m|\dot{x}_0|}{\sqrt{f^2-mc}} < \varepsilon$$

e

$$|\dot{x}(t)| \leqslant \nu_1|C_1| + \nu_2|C_2| \leqslant \frac{2\nu_1\nu_2|x_0| + (\nu_1+\nu_2)|\dot{x}_0|}{|\nu_2-\nu_1|} =$$

$$= \frac{c|x_0| + f|\dot{x}_0|}{\sqrt{f^2-mc}} < \varepsilon$$

supposto che le $|x_0| < \delta$ e $|x_0| < \delta$, dove

$$\delta = \min\left(\frac{\sqrt{f^2-mc}}{2f}\varepsilon,\ \frac{\sqrt{f^2-mc}}{2c}\varepsilon,\ \frac{\sqrt{f^2-mc}}{2m}\varepsilon\right).$$

Negli esempi 2 e 3, la stabilità della posizione di equilibrio è stabilita per mezzo delle equazioni finali ottenute dall'integrazione delle equazioni differenziali del moto del sistema. Queste equazioni finali del moto ci hanno dato la dipendenza delle deviazioni q_i e delle velocità generalizzate $\dot{q}_i$ dal tempo t e dai dati iniziali q_i^0, $\dot{q}_i^0$ $(i = 1, \ldots, n)$. La determinazione di queste equazioni finali del moto e il loro studio è assai difficile in problemi più complicati (per esempio, non lineari). Di grande interesse sono ora i criteri di stabilità di una posizione di equilibrio che non richiedono integrazioni preliminari delle equazioni differenziali del moto del sistema.

Nel lontano 1644 Torricelli sapeva che la posizione di un sistema di corpi sottoposti alla gravità sarebbe stata stabile se il centro di gravità del sistema avesse occupato le posizioni più basse possibili. Lagrange generalizzò questo principio di Torricelli al caso di forze potenziali arbitrarie e stabilì un criterio per la stabilità della posizione di equilibrio di un sistema conservativo.

Teorema di Lagrange [1]. *Se in qualche posizione di un sistema conservativo l'energia potenziale ha un minimo assoluto, allora questa posizione è la posizione di equilibrio stabile del sistema.*

Dimostrazione. Senza perdere di generalità, possiamo assumere che tutte le coordinate $q_1, \ldots, q_n$ e l'energia potenziale $\Pi(q_1, \ldots, q_n)$ siano nulle nella posizione qui considerata, cioè $q_1 = \ldots = q_n = 0$ e $\Pi(0, \ldots, 0) = 0$ [2]. Poiché nella posizione del sistema assegnata la funzione Π ha un minimo, le forze generalizzate in questa posizione sono nulle:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

cioè il punto $q_1 = \ldots = q_n = 0$ è la posizione di equilibrio del sistema. Dunque, per il fatto che il valore di $\Pi(0, \ldots, 0) = 0$ è un minimo assoluto, segue che in un certo intorno Δ della posizione di equilibrio

$$|q_i| < \Delta \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

abbiamo una disuguaglianza assoluta

$$\Pi(q_1, \ldots, q_n) > \Pi(0, \ldots, 0) = 0, \tag{4}$$

se non tutte le coordinate q_i si annullano immediatamente.

---

[1] Questo teorema compare in *Mécanique analytique* di Lagrange (I edizione, 1788), ma una dimostrazione rigorosa del teorema fu data per la prima volta da P.G. Lejeune Dirichlet. Per questa ragione, il teorema è spesso detto teorema di Dirichlet.

[1] L'energia potenziale Π è caratterizzata da una costante additiva arbitraria. Scegliamo questa costante in modo tale che il valore di Π sia nullo nella posizione di equilibrio.

Si costruisca l'espressione dell'energia totale del sistema:

$$E(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) = T + \Pi =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(q_1, \ldots, q_n)\, \dot{q}_i \dot{q}_k + \Pi(q_1, \ldots, q_n). \qquad (5)$$

Dalla disuguaglianza (4) e per il fatto che $T > 0$, se almeno una delle velocità generalizzate $\dot{q}_i$ non è nulla [1], segue che è sempre vero

$$E > 0,$$

dove la (3) è valida, supposto che tutte le $2n$ quantità q_i, $\dot{q}_i$ ($i = 1, \ldots, n$) non si annullino contemporaneamente, cioè *l'energia totale* $E(q_i, \dot{q}_i)$, *mentre si annulla nell'origine O dello spazio*

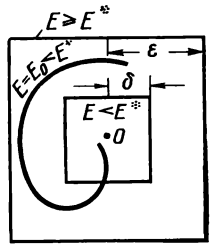


Fig. 42

degli stati a $2n$ *dimensioni, ha un minimo stretto* (*uguale a zero*) *in questo punto.*

Ora si consideri un arbitrario numero ε soggetto alla sola restrizione $0 < \varepsilon < \Delta$ e si considerino i valori dell'energia totale E sulla frontiera dell'intorno ε definita dalle disuguaglianze

$$|q_i| < \varepsilon, \quad |\dot{q}_i| < \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad (6)$$

(fig. 42). Poiché questa frontiera è un insieme chiuso di punti, la funzione continua E ha minimo E^* su questa frontiera. Poiché tutti i valori di E sono positivi sulla frontiera dell'intorno ε, il minimo E^* è anch'esso positivo. Così, sulla frontiera dell'intorno

$$E \geqslant E^* > 0. \qquad (7)$$

[1] Questo è vero se l'intorno Δ dell'origine dello spazio delle coordinate non contiene nessun punto singolare (vedi nota di pag. 48). Assumiamo che il punto O, nel quale la funzione Π ha un minimo, non sia singolare. Ma allora non ci sono punti singolari in nessun intorno Δ_0 del punto O. Scegliamo $\Delta < \Delta_0$.

D'altra parte, poiché la funzione continua E si annulla nell'origine O, allora ci sarà sempre un intorno δ del punto O [1] tale che in questo intorno

$$E < E^*. \tag{8}$$

Dunque, se le coordinate iniziali e le velocità iniziali soddisfano le disuguaglianze (2), l'energia iniziale $E_0 < E^*$. Ma nel moto di un sistema conservativo, la sua energia totale conserva la sua grandezza iniziale E_0 e ne segue che $E < E^*$ durante l'intero intervallo di tempo del moto. Per questa ragione, quando un sistema è in moto, il punto, che descrive questo moto nello spazio degli stati, non può raggiungere la frontiera dell'intorno ε su cui $E \geqslant E^*$ e per tutto il tempo giace entro questo intorno.

Il teorema è così dimostrato.

Si osservino due fatti riguardo a questo teorema.

Osservazione 1. *Il teorema di Lagrange è valido anche per sistemi non conservativi, che si ottengono da sistemi conservativi aggiungendo delle forze giroscopiche e dissipative.* Infatti, prima di tutto si osservi che la posizione di equilibrio si mantiene se forze giroscopiche o dissipative $\widetilde{Q}_\nu (q_k, \dot{q}_k)$ sono aggiunte al sistema. Per queste forze

$$\sum_{\nu=1}^{n} \widetilde{Q}_\nu (q_k, \dot{q}_k) \dot{q}_\nu \leqslant 0, \quad |q_k| < \Delta, \quad |\dot{q}_k| < \Delta.$$

Come prima, si scelga come posizione di equilibrio l'origine delle coordinate dello spazio degli stati e si assuma che tra le funzioni $\widetilde{Q}_\nu$ ce ne sia almeno una $\widetilde{Q}_j$ tale che $\widetilde{Q}_j (0) \neq 0$. Allora, a causa della continuità, $\widetilde{Q}_j \neq 0$ nell'intorno Δ dell'origine delle coordinate. Ma poiché q_k e $\dot{q}_k$ sono indipendenti, i loro valori in questo intorno possono essere sempre scelti in modo tale che

$$\sum_{\nu=1}^{n} \widetilde{Q}_\nu (q_k, \dot{q}_k) \dot{q}_\nu > 0.$$

Ma questo contraddice l'ipotesi di dissipatività e giroscopicità delle forze. Dunque, la supposizione circa l'esistenza di $\widetilde{Q}_j (0) \neq 0$ ci porta ad una contraddizione, cioè tutte le $\widetilde{Q}_\nu (0) = 0$, $\nu = 1, \ldots, n$, e questo indica che aggiungere forze giroscopiche e dissipative non viola l'equilibrio.

Le forze giroscopiche non sconvolgono la legge di conservazione dell'energia totale (vedi § 8) e per questa ragione l'intera dimostrazione del teorema di Lagrange risulta inalterata nel caso di forze giroscopiche. Nel caso di forze dissipative, l'energia totale $E = T + \Pi$ diminuisce quando il sistema si muove, e conseguentemente quando il sistema è in moto è verificata la disuguaglianza $E \leqslant E_0$ al posto dell'uguaglianza $E = E_0$. Ma

[1] Poiché la disuguaglianza (8) vale nell'intorno δ, $\delta \leqslant \varepsilon$.

da ciò segue anche che durante tutto il moto $E < E^*$, se $E_0 < E^*$. Così la dimostrazione del teorema è mantenuta anche qui con questa leggera modificazione.

Osservazione 2. La posizione di equilibrio di un sistema conservativo sarà ancora stabile quando l'energia potenziale Π ha, in questa posizione, un minimo *non stretto*, ma in qualunque intorno ε della posizione di equilibrio esiste un'ipersuperficie chiusa

$$f(q_1, \ldots, q_n) = 0 \qquad (9)$$

tale che contenga la posizione di equilibrio dentro di essa, e che abbia la proprietà che, su questa ipersuperficie, i valori dell'energia potenziale siano strettamente maggiori del valore di Π nella posizione di equilibrio.

Infatti, sia, come prima, nella posizione di equilibrio $q_1 = \ldots = q_n = 0$ e $\Pi(0, \ldots, 0) = 0$. Inoltre, l'equazione dell'ipersuperficie (9) deve essere scelta in modo tale che per i punti localizzati dentro l'ipersuperficie chiusa (9) valga la seguente disuguaglianza:

$$f(q_1, \ldots, q_n) > 0. \qquad (10)$$

Allora questa disuguaglianza, insieme alle disuguaglianze

$$|\dot{q}_k| < c_k \qquad (0 < c_k < \varepsilon;\ k = 1, \ldots, n), \qquad (11)$$

definisce, nello spazio degli stati a $2n$ dimensioni, una regione (un « ipercilindro » finito) G, collocata dentro l'intorno ε (6). Sulla frontiera della regione G, o $f = 0$ (allora $\Pi > 0$, $T \geqslant 0$) oppure, per almeno un k, vale l'uguaglianza $|\dot{q}_k| = c_k$ (allora $T > 0$, $\Pi \geqslant 0$). Dunque, la disuguaglianza stretta $E = T + \Pi > 0$ è sempre vera sulla frontiera della regione G.

Nel caso in studio, il minimo della funzione E sulla frontiera dell'intorno ε (6) può essere nullo. Allora, quando si dimostra il teorema di Lagrange, si considera al posto dell'intorno ε la regione G dentro di esso. Sulla frontiera della regione G il minimo dell'energia totale $E^* > 0$. Da questo punto in poi la dimostrazione rimane invariata.

Per $n = 1$ l'ipersuperficie chiusa (9) degenera in una coppia di punti situati sull'asse q, su lati differenti dell'origine O, mentre la regione G degenera in un rettangolo situato dentro l'intorno ε del punto O (fig. 43).

Il ragionamento fatto nell'osservazione 2 è ancora valido nel caso in cui le forze giroscopiche e dissipative (vedi osservazione 1) siano ulteriormente applicate al sistema.

Se i punti in cui la funzione Π ha un minimo $\Pi = 0$ giacciono sulla curva solida che parte dalla posizione di equilibrio, allora questa posizione di equilibrio può essere anche instabile. Per illustrare questo, consideriamo una particella libera con energia potenziale tale che non contenga una delle coordinate, per esem-

pio x: $\Pi = \Pi(y, z)$, e $\Pi(0, 0) = 0$ e $\Pi(y, z) > 0$ per $y^2 + z^2 > 0$. In questo caso, i punti di minimo stanno sull'asse x. La posizione d'equilibrio $x = y = z = 0$ è instabile, poiché per una velocità arbitrariamente piccola (in modulo) lungo l'asse x, il punto compie un moto uniforme lungo questo asse.

Negli esempi 1 e 2 dati a pag. 167, era considerato un sistema conservativo, mentre nell'esempio 3 (pag. 167) agisce una forza dissipativa su una particella. L'energia potenziale ha un minimo

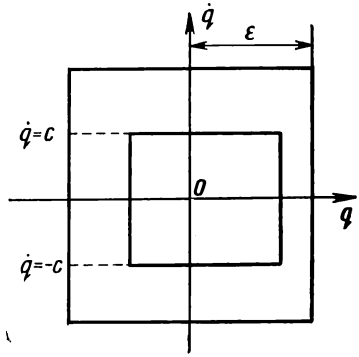


Fig. 43

assoluto nell'esempio 1 nel punto più basso dell'intorno, e negli esempi 2 e 3 in $x = 0$. Per questa ragione, queste posizioni d'equilibrio sono dette stabili.

Esempio 4. *Un sistema conservativo con un grado di libertà ha un'energia potenziale* $\Pi = q^4 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{q}$ (definiamo ancora $\Pi(0) = 0$). In accordo con l'osservazione 2, la posizione $q = 0$ è una posizione di equilibrio stabile.

§ 34. *Criterio di instabilità di una posizione di equilibrio. Teoremi di Ljapunov e di Četaev*

Nel lontano 1892 A.M. Ljapunov, nella sua celebre dissertazione intitolata *Il problema generale della stabilità del moto*, introdusse il problema dell'inverso del teorema di Lagrange. Il problema non è stato ancora risolto completamente. Una soluzione parziale è data nei due teoremi di Ljapunov e nel teorema di Četaev, in cui sono stabilite alcune condizioni sufficienti per l'instabilità di una posizione di equilibrio.

Come prima, poniamo $q_1 = \ldots = q_n = 0$ e $\Pi(0, \ldots, 0) = 0$ per una posizione di equilibrio. Scriviamo lo sviluppo dell'e-

nergia potenziale in serie di potenze delle coordinate (« deviazioni »):

$$\Pi = \Pi_m(q_1, \ldots, q_n) + \Pi_{m+1}(q_1, \ldots, q_n) + \ldots$$
$$[\Pi_m(q_1, \ldots, q_n) \not\equiv 0, \quad m \geqslant 2], \tag{1}$$

dove $\Pi_k(q_1, \ldots, q_n)$ è una funzione omogenea di k-esimo grado ($k = m, m+1, \ldots$), e il minimo valore delle potenze dei termini presenti in questo sviluppo è $m \geqslant 2$, poiché nella posizione di equilibrio tutte le $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right)_0 = 0$.

Primo teorema di Ljapunov. *Se l'energia potenziale* $\Pi(q_1, \ldots, q_n)$ *di un sistema conservativo in una posizione di equilibrio non ha un minimo, e questo fatto può essere visto dai termini di secondo grado* $\Pi_2(q_1, \ldots, q_n)$ *dello sviluppo* (1) [1], *allora la posizione di equilibrio data è instabile.*

Dimostrazione. Nell'espressione dell'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k,$$

sviluppiamo i coefficienti $a_{ik}(q_1, \ldots, q_n)$ in serie di potenze delle coordinate e denotiamo con a_{ik}^0 i termini noti (cioè i valori delle funzioni $a_{ik}(q_1, \ldots, q_n)$ per $q_1 = \ldots = q_n = 0$). Allora ponendo

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}^0 \dot{q}_i \dot{q}_k$$

avremo

$$T = T_0 + (*), \quad \Pi = \Pi_2 + (*);$$

qui e più avanti useremo il simbolo $(*)$ per rappresentare la somma dei termini aventi un ordine più alto di grandezza relativa alle coordinate e alle velocità, rispetto ai termini prima scritti per esteso. Poiché T_0 è una forma quadratica definita positiva con coefficienti costanti, è possibile, per mezzo di una trasformazione lineare non singolare delle variabili, ridurre simultaneamente le due forme quadratiche T_0 e Π_2 a una somma di quadrati, dopo di che lo sviluppo di T e Π nelle nuove variabili $\theta_1, \ldots, \theta_n$ assumerà la forma [2]

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \dot{\theta}_k^2 + (*), \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \theta_k^2 + (*). \tag{2}$$

[1] Cioè $m = 2$, e Π_2 è una forma quadratica che assume valori negativi (probabilmente insieme a valori positivi).

[2] Le coordinate $\theta_1, \ldots, \theta_n$ sono dette coordinate *normali* o *principali*. Saranno studiate più dettagliatamente nel § 41.

Poiché la forma quadratica Π_2 assume alcuni valori negativi, esiste almeno un $\lambda_k < 0$.

Le equazioni di Lagrange possono essere scritte nelle coordinate θ_k così:

$$\ddot{\theta}_k = -\lambda_k \theta_k + (*) \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Consideriamo la forma quadratica ausiliaria

$$V = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \left[\left(\lambda_k^2 + \lambda_k + \frac{\mu^2}{2} \right) \theta_k^2 + \mu (1 - \lambda_k) \theta_k \dot{\theta}_k + \right.$$

$$\left. + \left(1 + \lambda_k + \frac{\mu^2}{2} \right) \dot{\theta}_k^2 \right], \tag{4}$$

dove $\varepsilon_k = 1$ per $\lambda_k \geqslant 0$ e $\varepsilon_k = -1$ per $\lambda_k < 0$ $(k = 1, \ldots, n)$, e il numero $\mu > 0$.

Si verifica direttamente che, per l'equazione (3) e l'uguaglianza (4),

$$\frac{d}{dt} (e^{-\mu t} V) = e^{-\mu t} \left[\mu \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \left(\lambda_k + \frac{\mu^2}{4} \right) (\theta_k^2 + \dot{\theta}_k^2) + (*) \right], \tag{5}$$

quando il sistema è in moto.

Senza perdere di generalità, assumiamo che $\lambda_1 < 0$, e che λ_1 è il maggiore dei numeri negativi λ_k. Il numero positivo μ è scelto in modo tale che valgano simultaneamente le seguenti disuguaglianze:

$$\lambda_1 + \frac{\mu^2}{4} < 0, \quad \lambda_1^2 + \lambda_1 + \frac{\mu^2}{2} > 0. \tag{6}$$

Dalla prima disuguaglianza segue che la sommatoria del membro destro della (5) è una forma quadratica definita positiva. Ma allora, per θ_k e $\dot{\theta}_k$ sufficientemente piccoli (in valore assoluto),

$$| \theta_k | < \Delta, \quad | \dot{\theta}_k | < \Delta \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{7}$$

il membro destro della (5) sarà sempre positivo, cioè

$$\frac{d}{dt} (e^{-\mu t} V) > 0,$$

da cui

$$e^{-\mu t} V > e^{-\mu t_0} V_0$$

oppure

$$V > V_0 e^{\mu (t - t_0)}. \tag{8}$$

Assumiamo tutti i valori iniziali θ_k^0, $\dot{\theta}_k^0$ $(k = 1, \ldots, n)$ uguali a zero, eccetto θ_1^0, che assumeremo, in valore assoluto, minore di Δ. Allora, usando l'espressione (4) e la seconda disuguaglianza (6), troviamo $V_0 > 0$. Ma in tal caso il moto oltrepasserà i limiti dell'intorno (7), per quanto piccolo possa essere

$|\theta_1^0|$, poiché altrimenti dalla disuguaglianza (8) seguirebbe che $\lim_{t\to\infty} V = \infty$, mentre la forma quadratica V nell'intorno (7) è finita. Il teorema è così dimostrato.

Per il caso di $m > 2$, nello sviluppo (1) possiamo usare i seguenti due teoremi che sono qui enunciati senza dimostrazione [1].

Secondo teorema di Ljapunov. *Se l'energia potenziale* Π *di un sistema conservativo per* $q_1 = \ldots = q_n = 0$ *ha un massimo stretto e questo fatto può essere determinato procedendo dai termini di potenza più bassa di* $\Pi_m(q_1, \ldots, q_n)$ $(m \geqslant 2)$ *nello sviluppo* (1) [2], *allora la posizione* $q_1 = \ldots = q_n = 0$ *è una posizione di equilibrio instabile del sistema.*

Teorema di Četaev. *Se l'energia potenziale* Π *di un sistema conservativo è una funzione omogenea delle deviazioni* $q_1, \ldots, q_n$ *e se nella posizione di equilibrio* $q_1 = \ldots = q_n = 0$ *essa non ha un minimo, allora la posizione di equilibrio è instabile.*

Esempio 1. Sia $\Pi = A(1 - \cos \alpha q)$; $n = 1$. La funzione Π ha minimi stretti nei punti $q_{2k} = \dfrac{2k\pi}{\alpha}$ e massimi stretti ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) nei punti $q_{2k-1} = \dfrac{(2k-1)\pi}{\alpha}$. L'ultimo fatto segue dalla forma del termine di ordine più basso nello sviluppo in serie di potenze delle deviazioni

$$\Pi = -\frac{\alpha^2}{2}(q - q_{2k-1})^2 + \ldots$$

Allora, in accordo con i teoremi di Lagrange e Ljapunov, i punti q_{2k} corrispondono a posizioni di equilibrio stabile, e i punti q_{2k-1} a posizioni di equilibrio instabile.

Esempio 2. $\Pi = Aq_1 \ldots q_n$. Dal teoroma di Četaev segue che la posizione $q_1 = \ldots = q_n = 0$ è una posizione di equilibrio instabile.

§ 35. *Stabilità asintotica di una posizione di equilibrio. Sistemi dissipativi*

Introduciamo ora il concetto di posizione di equilibrio asintoticamente stabile. Una posizione di equilibrio è detta *asintoticamente stabile* se è stabile e se, inoltre, per deviazioni e velocità iniziali sufficientemente piccole (in valore assoluto), tutte le deviazioni e tutte le velocità tendono a zero all'aumentare del tempo senza limite, cioè se *esiste un numero* $\delta_0 > 0$ *tale che*

$$\lim_{t\to\infty} q_i(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \dot{q}_i(t) = 0 \quad (i = 1, \ldots n) \tag{1}$$

[1] Il lettore troverà le dimostrazioni nei libri seguenti: A.M. Ljapunov, *Problema generale sulla stabilità del moto*, 1935, §§ 16, 25; N.G. Četaev, *Stabilità del moto*, 1965, § 17; I.G. Malkin, *Teoria della stabilità del moto*, 1952, §§ 14, 17 (ed. russa).

[2] Cioè in un certo intorno dell'origine (esclusa l'origine stessa) $\Pi_m(q_1, \ldots, q_n) < 0$ sempre. Questo è possibile solo se m è pari.

quando sono soddisfatte le disuguaglianze

$$q_i^0 | < \delta_0, \quad | \dot{q}_i^0 | < \delta_0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{1'}$$

In un'interpretazione geometrica (fig. 44), questo significa che nello spazio degli stati $(q_i, \dot{q}_i)$ tutte le traiettorie, che partono dall'intorno δ_0 dell'origine O, si avvicinano asintoticamente al punto O per $t \to \infty$.

Tra gli esempi 1, 2 e 3 esaminati nelle pagg. 167-168, solo nell'esempio 3 la posizione di equilibrio stabile è asintoticamente stabile.

Considereremo sistemi scleronomi sottoposti all'azione delle forze potenziali $-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$ e delle forze non potenziali $\widetilde{Q}_i$ $(i = 1, \ldots$

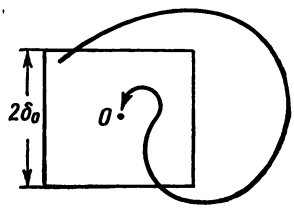


Fig. 44

$\ldots, n)$, assumendo che l'energia potenziale Π e le forze non potenziali $\widetilde{Q}_i$ non dipendono esplicitamente dal tempo:

$$\Pi = \Pi(q_k), \quad \widetilde{Q}_i = \widetilde{Q}_i(q_k, \dot{q}_k) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

In questo caso il tempo t non compare esplicitamente nelle equazioni di Lagrange, che possono essere scritte nella seguente forma (risolte nelle accelerazioni generalizzate) (vedi § 7, pag. 46):

$$\ddot{q}_i = G_i(q_k, \dot{q}_k) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Nel caso in studio, l'energia totale E del sistema scleronomo non contiene esplicitamente il tempo:

$$E = E(q_k, \dot{q}_k). \tag{4}$$

Calcolando la sua derivata totale rispetto al tempo quando il sistema è in moto, troviamo

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial E}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} G_i = E'(q_k, \dot{q}_k). \tag{5}$$

Così, in ogni punto dello spazio degli stati $(q_k, \dot{q}_k)$, non solo l'energia totale ma anche la sua derivata totale rispetto al tempo ha un valore definito.

Se le forze $\widetilde{Q}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ sono forze dissipative (vedi § 8), allora $\frac{dE}{dt} \leqslant 0$ quando il sistema è in movimento, cioè nella regione dello spazio degli stati qui considerata la funzione $E'(q_k, \dot{q}_k)$ può assumere solamente valori non positivi.

Nel caso di un sistema dissipativo definito (vedi § 8), $\frac{dE}{dt} = E'(q_i, \dot{q}_i)$ si annulla solo in quei punti dello spazio degli stati $(q_i, \dot{q}_i)$, dove tutte le $\dot{q}_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Assumeremo che la posizione di equilibrio del sistema sia isolata, cioè che non ci sia nessun'altra posizione di equilibrio nel suo intorno. Allora abbiamo il seguente

Teorema sulla stabilità asintotica. *Se l'energia potenziale* Π *di un sistema scleronomo dissipativo definito ha un minimo stretto in qualche posizione di equilibrio che è isolata, allora la posizione di equilibrio è asintoticamente stabile.*

Dimostrazione. Sia nuovamente

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0 \text{ e } \Pi(0) = 0$$

nella posizione di equilibrio. Come nella dimostrazione del teorema di Lagrange, si scelga nello spazio degli stati un intorno ε dell'origine delle coordinate O in cui l'energia E è positiva,

$$E(q_i, \dot{q}_i) > 0 \tag{6}$$

in tutti i punti diversi da O e in cui non ci sono stati di equilibrio diversi da O.

Poiché, per il teorema di Lagrange, la posizione di equilibrio $q_1 = \ldots = q_n = 0$ è stabile, per qualunque $\varepsilon > 0$ è possibile determinare un $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che tutti i moti stiano dentro l'intorno ε del punto O, se il punto iniziale è scelto nell'intorno δ (fig. 45). Per l'intorno δ_0 si consideri l'intorno in cui sia soddisfatta la condizione (8) del § 33 $(\delta_0 \leqslant \delta)$. Consideriamo uno dei moti che iniziano nell'intorno δ_0. Poiché, determinato il moto, l'energia E diminuisce, segue [1] che

$$\lim_{t \to \infty} E(t) = E_\infty \geqslant 0$$

e $E(t) \geqslant E_\infty$ $(t \geqslant t_0)$. Assumiamo che $E_\infty \neq 0$, cioè $E_\infty > 0$, dunque consideriamo la serie di valori del tempo $t_s \to \infty$ e la

[1] Questo limite esiste per il fatto che $E(t)$ è una funzione continua monotona decrescente non negativa.

serie dei valori delle coordinate delle fasi

$$q_i^{(s)} = q_i(t_s), \quad \dot{q}_i^{(s)} = \dot{q}_i(t_s), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Poiché l'intera traiettoria giace nell'intorno ε, sono vere le seguenti disuguaglianze per tutti gli s e i:

$$|q_i^{(s)}| < \varepsilon, \quad |\dot{q}_i^{(s)}| < \varepsilon.$$

Per il lemma di Bolzano — Weierstrass, è possibile, dalle serie infinite limitate $q_i^{(s)}$ e $\dot{q}_i^{(s)}$, scegliere le sottoserie $q_i^{(k)}$ e $\dot{q}_i^{(k)}$.

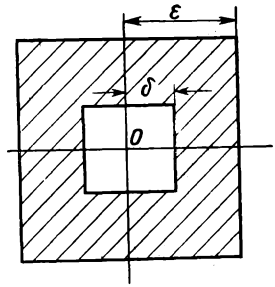


Fig. 45

Siano

$$\lim_{k\to\infty} q_i^{(k)} = q_i^*, \quad \lim_{k\to\infty} \dot{q}_i^{(k)} = \dot{q}_i^*, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

dove

$$|q_i^*| < \varepsilon, \quad |\dot{q}_i^*| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ma allora, poiché $E(t)$ è continua,

$$E(q_i^*, \dot{q}_i^*) = \lim_{k\to\infty} E(q_i^{(k)}, \dot{q}_i^{(k)}) = E_\infty > 0.$$

Per ipotesi, il punto $(q_i^*, \dot{q}_i^*)$ non coincide con l'origine delle coordinate, dove $E = 0$.

Consideriamo il punto $(q_i^*, \dot{q}_i^*)$, $i = 1, \ldots, n$ come punto iniziale del moto per $t = t_0$. Poiché questo punto non coincide con il punto O, cioè non è una posizione di equilibrio, allora quando il sistema è in moto, almeno una delle velocità generalizzate $\dot{q}_i$ sarà diversa da zero e per questa ragione $\frac{dE}{dt} < 0$. Ma allora per qualche $t = t_1$ sarà vera la disuguaglianza $E < E_\infty$.

Dunque, consideriamo il moto di un sistema che inizia al tempo $t = t_0$ dal punto $(q_i^{(k)}, \dot{q}_i^{(k)})$. Per la (7), i valori di $q_i^{(k)}$ e $\dot{q}_i^{(k)}$, per k sufficientemente grande, saranno arbitrariamente vi-

cini rispettivamente ai valori di q_i^* e $\dot{q}_i^*$. Segue che, per k sufficientemente grande, anche i valori delle coordinate delle fasi per $t = t_1$ saranno arbitrariamente vicini nel caso di moti che iniziano al tempo $t = t_0$ dai punti iniziali $(q_i^{(k)}, \dot{q}_i^{(k)})$ e $(q_i^*, \dot{q}_i^*)$ (le soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali sono funzioni continue dei dati iniziali). Dunque, per $t = t_1$ sarà valida la disuguaglianza $E(t_1) < E_\infty$ per un moto che inizia al tempo $t = t_0$, dal punto $(q_i^{(k)}, \dot{q}_i^{(k)})$, poiché l'energia totale E è una funzione continua delle coordinate delle fasi. Ma per l'unicità delle soluzioni delle equazioni di Lagrange, lo stato (al tempo $t = t_1$) di un sistema, che al tempo $t = t_0$ parte da un punto iniziale $(q_i^{(k)}, \dot{q}_i^{(k)})$, $i = 1, \ldots, n$, coincide [1] con lo stato al tempo $t_k + t_1$ del sistema che parte al tempo $t = t_0$ dal punto iniziale $(q_i^{(0)}, \dot{q}_i^{(0)})$, $i = 1, \ldots, n$; per questa ragione, il valore dell'energia $E(t_k + t_1)$ che ci interessa deve soddisfare la disuguaglinaza

$$E(t_k + t_1) < E_\infty,$$

ma questo è impossibile, poiché $E(t) \geqslant E_\infty$ per ogni $t > t_0$.

Siamo così arrivati ad una contraddizione assumendo che $E_\infty \neq 0$; dunque,

$$E_\infty = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \to \infty} E(t) = 0. \tag{8}$$

Poiché, per la disuguaglianza (6), l'uguaglianza $E = 0$ è vera solo nel punto O, segue dalla (8) che per $t \to \infty$ il punto, che descrive il sistema nello spazio degli stati, tende all'origine delle coordinate, e questo significa che la relazione (1) è vera. Il teorema è così dimostrato.

Nell'esempio 3 di pag. 167, $E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} cx^2$ e

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + cx\dot{x} = (m\ddot{x} + cx)\dot{x} = -2f\dot{x}^2 < 0$$

poiché $f > 0$. Il sistema è definito dissipativo e la posizione di equilibrio è isolata; questo fatto deriva dall'equazione del moto quando si sostituisce la soluzione $x = \text{cost}$. Per il teorema, la posizione di equilibrio è asintoticamente stabile.

---

[1] Poiché il tempo t non compare esplicitamente nell'equazione del moto (3), la scelta del tempo zero è indifferente. Dunque, se al posto di $q_i^{(0)}$, $\dot{q}_i^{(0)}$ consideriamo come stato iniziale $q_i^{(k)}$, $\dot{q}_i^{(k)}$, $i = 1, \ldots, n$, allora il sistema passerà successivamente attraverso gli stessi stati come nel moto iniziale, ma in istanti di tempo differenti.

Uno studio del moto di un sistema scleronomo dissipativo definito nell'intorno della sua posizione di equilibrio asintoticamente stabile sarà trattato nel § 46.

Ljapunov dimostrò un teorema che generalizza il teorema di Lagrange. Egli osservò che *nel dimostrare il teorema di Lagrange è possibile, al posto dell'energia E, considerare qualunque funzione continua $V(q_k, \dot{q}_k)$ (con derivate parziali del primo ordine continue) che abbia un minimo stretto nello stato di equilibrio e che non sia crescente in nessun moto del sistema.*

Calcoliamo la derivata rispetto al tempo della funzione V usando l'equazione del moto (3):

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} G_i(q_k, \dot{q}_k) = V'(q_k, \dot{q}_k). \tag{9}$$

Da questa formula segue tra l'altro che la funzione V' si annulla nell'origine delle coordinate O dello spazio degli stati, poiché il punto O corrisponde allo stato di equilibrio in cui tutte le $\dot{q}_i = 0$ e tutte le $\ddot{q}_i = G_i = 0$. Se la funzione V non è crescente in nessun moto, $\frac{dV}{dt} = V'(q_k, \dot{q}_k) \leqslant 0$. In questo caso, la funzione V' ha un massimo nello stato di equilibrio O. Ora se questo massimo è stretto, allora nell'intorno del punto O (eccetto il punto O stesso) $V' < 0$, e quando il sistema è in moto entro i limiti dell'intorno, la funzione V decresce strettamente.

È ora possibile ripetere quasi letteralmente la dimostrazione del teorema di Lagrange, usando la funzione V al posto di E. Nel caso di stabilità asintotica (per esempio, per un sistema dissipativo), la dimostrazione sarà ancora più semplice se si richiede che nella posizione di equilibrio la derivata $\frac{dV}{dt}$ abbia un estremo stretto di tipo opposto rispetto all'estremo della funzione V [1].

Osserviamo anche che nel formulare il criterio di stabilità, le parole « minimo » e « massimo » possono essere scambiate, poiché sostituendo la funzione $-V$ alla funzione V si ritorna alla prima formulazione.

Così è stato dimostrato il seguente

Teorema. *Se è data la posizione di equilibrio di un sistema scleronomo sottoposto all'azione di forze che non dipendono esplicitamente dal tempo, ed esiste una funzione $V(q_k, \dot{q}_k)$ continua insieme alle sue derivate parziali del primo ordine che abbia un estremo stret-*

[1] Nella dimostrazione del teorema sulla stabilità di un sistema dissipativo, la derivata $\frac{dE}{dt}$ non ha un massimo stretto nella posizione di equilibrio. In relazione a ciò abbiamo supposto che la posizione di equilibrio fosse isolata.

to nello stato di equilibrio, mentre la derivata V' di V rispetto al tempo (calcolata dalle equazioni del moto) ha in questo stesso stato un estremo di tipo opposto, allora la posizione di equilibrio, qui considerata, è stabile. Se l'estremo della derivata è anche stretto, allora la posizione di equilibrio è asintoticamente stabile.

La funzione $V(q_k, \dot{q}_k)$ trattata nel teorema è generalmente detta *funzione di Ljapunov.*

§ 36. *Stabilità condizionata. Formulazione generale del problema. Stabilità del moto o di un processo arbitrario. Teorema di Ljapunov.*

Le disuguaglianze (1) e (2) (vedi pag. 166), che definiscono la stabilità di una posizione di equilibrio, implicano *tutte* le deviazioni q_i e *tutte* le velocità generalizzate $\dot{q}_i$. Ad ogni modo, in molti problemi abbiamo a che fare con una *stabilità condizionata* quando le disuguaglianze su indicate valgono solo per alcune delle $2n$ quantità $q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ o, in una formulazione più generale, per alcune funzioni $x_1, \ldots, x_m$ di queste quantità:

$$x_i = f_i(q_k, \dot{q}_k) \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{1}$$

Si assume anche che tutte le funzioni (1) si annullino per

$$q_k = 0, \qquad \dot{q}_k = 0 \quad (k = 1, \ldots, n), \quad \text{cioè} \quad f_i(0, \ldots, 0) = 0$$

e soddisfino il sistema autonomo [1] di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine [2]

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_i, \ldots, x_m, t) \quad (i = 1, \ldots, m), \tag{2}$$

dove $X_i(x_i, \ldots, x_m, t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ sono funzioni continue per

$$|x_i| \leqslant \Delta, \quad t \geqslant t_0 \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{3}$$

(t_0 è un istante fissato di tempo iniziale).

Allo stato di equilibrio corrisponde una soluzione nulla $x_i \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ del sistema di equazioni differenziali (2). Tale soluzione presuppone che i membri destri delle equazioni (2) soddisfino la condizione

$$X_i(0, \ldots, 0, t) \equiv 0 \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{4}$$

Da un punto di vista matematico è una questione di stabilità di una soluzione nulla del sistema di equazioni differenziali (2),

---

[1] Vedi nota di pag. 82.

[2] Nello studio della stabilità condizionata dei sistemi scleronomi, le funzioni X_i $(i = 1, \ldots, m)$ non dipendono esplicitamente dal tempo t. Abbiamo indicato t nel membro destro come argomento, tenendo presenti sistemi non scleronomi e generalizzazioni seguenti.

dove questa stabilità è definita come segue: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $t \geqslant t_0$

$$|x_i(t)| < \varepsilon \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{5}$$

finché

$$|x_i(t_0)| < \delta \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{6}$$

Per un'interpretazione geometrica delle disuguaglianze (5) e (6), si fa uso degli intorni di raggio ε e δ dell'origine delle coordinate nello spazio ad m dimensioni $(x_1, \ldots, x_m)$. Nel caso di stabilità asintotica richiediamo anche l'esistenza di un $\delta_0 > 0$ tale che

$$\lim_{t \to \infty} x_i(t) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{7}$$

finché

$$|x_i(t_0)| < \delta_0 \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{8}$$

Se si studia la stabilità (non condizionata!) di una posizione di equilibrio, allora per $x_1, \ldots, x_m$ possiamo considerare le quantità $q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ oppure le quantità $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$. Nel primo caso, le equazioni (2) sono le equazioni di Lagrange espresse come un sistema di $2n$ equazioni differenziali del primo ordine delle funzioni incognite $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$. Nel secondo caso, le equazioni (2) sono le equazioni canoniche di Hamilton:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Consideriamo due importanti casi particolari del sistema di equazioni (2) che frequentemente incontriamo nelle applicazioni.

1. Caso stazionario, quando t non compare esplicitamente nei membri destri X_i delle equazioni (2), cioè quando

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

2. Caso periodico, quando i membri destri X_i hanno un periodo τ rispetto alla variabile t:

$$X_i(x_1, \ldots, x_m, t + \tau) = X_i(x_1, \ldots, x_m, t) \quad (i = 1, \ldots, m).$$

In entrambi i casi la stabilità della soluzione nulla del sistema di equazioni differenziali (2) è determinata da un teorema che è una diretta generalizzazione del teorema dato alla fine del § 35.

Teorema di Ljapunov. *Se nel caso stazionario o periodico esiste una funzione* $V(x_1, \ldots, x_m, t)$ *continua insieme alle sue derivate parziali del primo ordine nella regione* (3), *la quale per ogni* t *considerato come parametro ha nel punto* $x_1 = \ldots = x_m = 0$ *un*

estremo stretto, mentre sempre nello stesso punto, e per ogni t, la sua derivata rispetto al tempo $V'(x_1, \ldots, x_m, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i + \frac{\partial V}{\partial t}$ *ha un estremo di tipo opposto, allora la soluzione nulla del sistema* (2) *è stabile. Ora se l'estremo della derivata V' è anch'esso stretto, allora la soluzione nulla del sistema* (2) *è asintoticamente stabile. Qui si assume che nel caso stazionario la funzione V non dipende esplicitamente dal tempo, ma nel caso periodico questa funzione è periodica rispetto a t con periodo* τ (τ è il periodo del membro destro delle equazioni (2)).

È sufficiente dimostrare questo teorema per il caso periodico, poiché il caso stazionario può essere visto come un caso particolare di quello periodico per ogni τ. La dimostrazione consiste nel ripetere il ragionamento dato precedentemente nella dimostrazione del teorema di Lagrange e del teorema sulla stazionarietà asintotica con le seguenti modificazioni: al posto di E usiamo ora la differenza

$$V(x_1, \ldots, x_m, t) - V(0, \ldots, 0, t)$$

e al posto dello spazio $(q_1, \dot{q}_i)$ consideriamo lo spazio m-dimensionale $(x_1, \ldots, x_m)$. Consideriamo t, che compare in V, come un parametro. Questo parametro, per la sua periodicità, può variare nell'intervallo finito $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \tau$. Per questo fatto, la presenza della variabile t in V non fa sorgere nessuna complicazione nella dimostrazione del teorema.

Osserviamo che nel caso generale (non stazionario, e non periodico) devono essere imposte condizioni più rigorose sulla funzione di Ljapunov [1].

Sottolineiamo un caso particolare del teorema di Ljapunov, che è usato frequentemente come criterio di stabilità semplice (non asintotica).

Sia la funzione $V(x_1, \ldots, x_m, t)$ l'integrale del sistema di equazioni differenziali (2), cioè la funzione V diventa una costante se sostituiamo ad essa una qualunque soluzione del sistema (2). In questo caso $\frac{dV}{dt} = V'(x_1, \ldots, x_m, t) \equiv 0$ e si può considerare che la funzione V' abbia un massimo e un minimo (naturalmente, non stretto) nel punto $x_1 = \ldots = x_m = 0$ per ogni t. Per questa ragione, abbiamo il seguente corollario al teorema di Ljapunov:

Corollario. *Se il sistema di equazioni differenziali* (2) *ha un integrale* $V(x_1, \ldots, x_m, t)$ (*che non dipende da t nel caso stazionario ed è periodico rispetto a t con periodo* τ *nel caso periodico*) *e se*

[1] Vedi, per esempio, N.G. Četaev, *Stabilità del moto*, cap. II (ed. russa).

questo integrale ha un estremo stretto nel punto $x_1 = \ldots = x_m = 0$, *per ogni* t *fissato, allora la soluzione nulla del sistema* (2) *è stabile.*

Osserviamo che nella dimostrazione del teorema di Lagrange per un sistema conservativo, si fa uso dell'integrale dell'energia E.

Si considerino ora i moti o i processi più generali descritti dal sistema di equazioni differenziali del primo ordine:

$$\frac{dz_i}{dt} = Z_i(z_i, \ldots, z_m, t) \quad (i = 1, \ldots, m), \tag{10}$$

dove i membri destri sono funzioni continue in una certa regione di variazione delle variabili $z_1, \ldots, z_m$ per $t \geqslant t_0$ che soddisfano le condizioni di esistenza e di unicità della soluzione in base ai dati iniziali $z_i(t_0)$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Sia $\tilde{z}_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ una soluzione del sistema di equazioni (10) che definisce il processo. Per chiarire la questione della stabilità di questo processo, introduciamo delle nuove funzioni incognite o « deviazioni », al posto delle funzioni incognite $z_1, \ldots, z_m$,

$$x_i = z_i - \tilde{z}_i(t) \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{11}$$

Allora nelle nuove variabili, il sistema di equazioni differenziali (10) sarà espresso nella forma del sistema (2), dove

$$X_i = Z_i[x_1 + \tilde{z}_1(t), \ldots, x_m + \tilde{z}_m(t)] - X_i[\tilde{z}_1(t), \ldots, \tilde{z}_m(t)]. \tag{12}$$

La soluzione nulla $x_1 = \ldots = x_m = 0$ del sistema di equazioni differenziali (2) corrisponde alla soluzione $z_i = \tilde{z}_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ del sistema di equazioni differenziali (10) nelle nuove variabili. Questa circostanza permette che la questione della stabilità del processo $\tilde{z}_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ si riduca al problema, che abbiamo già studiato, della stabilità della soluzione nulla del sistema di equazioni differenziali (2). In altre parole, la soluzione $z_i = \tilde{z}_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ del sistema (10) è detta stabile (o corrispondentemente, asintoticamente stabile) se la soluzione nulla $x_1 = \ldots = x_m = 0$ del sistema di equazioni delle deviazioni (2) con membro destro definito dalle formule (12) è stabile (o in corrispondenza, asintoticamente stabile). Tutto ciò apre un vasto campo di applicazioni del teorema di Ljapunov dato in questo paragrafo. Questo teorema può essere usato per determinare non solo la stabilità di uno stato di equilibrio, ma anche la stabilità del moto, in generale, di qualunque processo definito da un sistema di equazioni differenziali ordinarie.

Esempio 1. Consideriamo *la rotazione inerziale di un solido avente un punto fisso* O. Le equazioni dinamiche di Eulero in questo caso hanno la forma

$$A\frac{dp}{dt} = (B - C)qr, \qquad B\frac{dq}{dt} = (C - A)rp, \qquad C\frac{dr}{dt} = (A - B)pq. \tag{13}$$

Qui p, q, r sono le proiezioni della velocità angolare ω sugli assi principali di inerzia del solido, $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ e A, B, C sono i momenti d'inerzia rispetto a questi assi.

Le equazioni (13) ammettono le seguenti tre soluzioni particolari che definiscono le rotazioni permanenti del solido intorno agli assi principali:

$$1.\quad q=r=0, \qquad p=\text{cost}=p_0;$$

$$2.\quad r=p=0, \qquad q=\text{cost}=q_0;$$

$$3.\quad p=q=0, \qquad r=\text{cost}=r_0.$$

Ci limitiamo ad elaborare la stabilità della rotazione 1, poiché la 2 e la 3 possono essere espresse come la 1 con gli assi indicati in modo differente. Qui, la stabilità della soluzione 1 delle equazioni di Eulero (13) determinerà la stabilità condizionata della rotazione 1 rispetto alla velocità angolare ω [1].

Si formino le equazioni nelle deviazioni, ponendo $x_1 = p - p_0$, $x_2 = q$, $x_3 = r$,

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=\dfrac{B-C}{A}\,x_2x_3, \qquad \dfrac{dx_2}{dt}=\dfrac{C-A}{B}\,x_3\,(x_1+p_0), \\ \dfrac{dx_3}{dt}=\dfrac{A-B}{C}\,x_2\,(x_1+p_0). \end{cases} \tag{14}$$

Sia l'asse maggiore o minore dell'ellissoide di inerzia disposto lungo l'asse $O\xi$ della rotazione permanente qui studiata. Il fatto che A, B e C siano inversamente proporzionali al quadrato degli assi dell'ellissoide d'inerzia significa che $A < B$, C oppure $A > B$, C. Per la funzione di Ljapunov, consideriamo la funzione

$$V=(Ax_1^2+Bx_2^2+Cx_3^2+2Ap_0x_1)^2 \pm [B\,(B-A)\,x_2^2+C\,(C-A)\,x_3^2],$$

dove è assunto il segno più per $A < B$, C e il segno meno per $A > B$, C.

La funzione V si annulla per $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ed è positiva nell'intorno di questo punto, cioè la funzione V ha un minimo stretto in questo punto. In altre parole, si verifica velocemente che $\dfrac{dV}{dt} = 0$ per l'equazione (14), cioè la funzione V è un integrale del sistema di equazioni differenziali (14). Per questa ragione, in accordo con il corollario del teorema di Ljapunov, *la rotazione permanente intorno all'asse maggiore o minore di un ellissoide d'inerzia è stabile.*

È possibile mostrare anche che la rotazione permanente intorno all'asse medio di un ellissoide d'inerzia è instabile, ma questo richiederebbe l'uso del criterio di instabilità di Četaev [2].

Esempio 2. Per mezzo della figura, consideriamo il problema della stabilità del moto rotazionale di un proiettile [3].

Per semplificare il problema, si assume che il baricentro del proiettile C sia in moto rettilineo lungo l'asse orizzontale x con velocità costante $v =$ = cost. Sia Cxy il piano verticale dello sparo. La posizione dell'asse $C\xi$ (l'asse di simmetria dinamica) del proiettile è definita da due angoli: l'ango-

[1] La stabilità rispetto ad ω significa che un piccolo cambiamento della velocità angolare iniziale ω_0 implica un piccolo cambiamento del vettore per tutta la durata del moto. In altre parole, questa è stabilita rispetto alle deviazioni $x_1 = p - p_0$, $x_2 = q$, $x_3 = r$. Naturalmente qui gli angoli di Eulero cambiano costantemente.

[2] N.G. Četaev, *Stabilità del moto*, III edizione, 1965, pag. 37 (ed. russa).

[3] La soluzione di questo problema è stata data da Četaev e pubblicata in « Matematica applicata e meccanica », vol. X, fasc. 1, 1946 (ed. russa).

lo α formato dalla proiezione Cx_1 dell'asse $C\xi$ sul piano Cxy con l'asse Cx e l'angolo β tra Cx_1 e $C\xi$ (fig. 46). Per rotazioni successive attraverso l'angolo α e l'angolo β, il triedro degli assi $Cxyz$ passa nel triedro $C\xi\eta\zeta$. Un'ulteriore rotazione attraverso l'angolo φ intorno all'asse $C\xi$ porta il triedro $C\xi\eta\zeta$ nel triedro degli assi fissati nel proiettile. Dunque, la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ del proiettile è composta da tre componenti:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_3,$$

dove $\omega_1 = \dot{\alpha}$, $\omega_2 = \dot{\beta}$ e $\omega_3 = \dot{\varphi}$. Le proiezioni della velocità angolare sugli assi principali d'inerzia $C\xi$, $C\eta$, $C\zeta$ sono definite dalle formule

$$p = \dot{\varphi} + \dot{\alpha} \operatorname{sen} \beta,$$

$$q = -\dot{\beta}, \qquad r = \dot{\alpha} \cos \beta.$$

Denotando con A l'assiale e con B il momento d'inerzia equatoriale del proiettile, otteniamo le seguenti espressioni dell'energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2}\,[Ap^2 + B\,(q^2 + r^2)] = \frac{1}{2}\,[A\,(\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \operatorname{sen} \beta)^2 + B\,(\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta)].$$

Assumeremo che oltre alla forza di gravità sia applicata, nel punto D dell'asse del proiettile (nel « centro di pressione »), la forza di resistenza

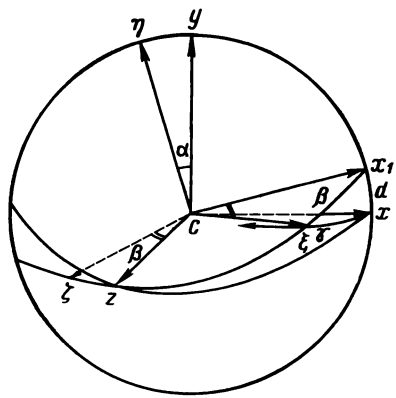


Fig 46.

dell'aria $\boldsymbol{R}$, che è costante [1] e di direzione opposta alla velocità v, cioè in direzione negativa dell'asse x. Sia $l = CD$, e γ l'angolo tra gli assi Cx e $C\xi$. Allora il momento della forza $\boldsymbol{R}$ rispetto a C è uguale a $Rl \operatorname{sen} \gamma$, e il lavoro elementare della forza $\boldsymbol{R}$ sarà

$$\delta A = Rl \operatorname{sen} \gamma \, \delta\gamma = -\delta\,(Rl \cos \gamma),$$

dunque, come potenziale della forza possiamo considerare la funzione [2]

$$\Pi = Rl \cos \gamma = Rl \cos \alpha \cos \beta.$$

---

[1] R è una funzione di v, $R = f(v)$, e così da $v = \text{cost}$ segue che $R = \text{cost}$.

[2] Su una sfera di centro C, gli archi α, β, γ formano un triangolo rettangolo sferico con « cateti » α, β e « ipotenusa » γ. Per questo triangolo, la formula $\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta$ è vera. La veridicità della formula segue da un elementare ragionamento geometrico.

Le oscillazioni degli assi del proiettile sono caratterizzate dal cambio degli angoli α e β. Per determinare la stabilità del moto rotazionale del proiettile procederemo dai tre integrali del moto:

$$1)\ T+\Pi=\text{cost};\quad 2)\ G_x=\text{cost};\quad 3)\ G_\xi=Ap=\text{cost}.$$

Il primo integrale è l'integrale dell'energia; G_x e G_ξ sono le proiezioni del momento cinetico G_C sugli assi Cx e $C\xi$. Il fatto che G_x è costante, quando il sistema è in moto, segue dal fatto che il momento della forza R rispetto all'asse Cx è nullo. Il terzo integrale esprime il fatto che il momento generalizzato Ap è costante, e corrisponde alla coordinata ciclica φ. Si osservi che (vedi fig. 46)

$$\begin{aligned} G_x &= G_\xi \cos(x\xi)+G_\eta \cos(x\eta)+G_\zeta \cos(x\zeta)= \\ &= Ap\cos(x\xi)+Bq\cos(x\eta)+Br\cos(x\zeta)= \\ &= Ap\cos\alpha\cos\beta+B(\dot\beta\,\mathrm{sen}\,\alpha-\dot\alpha\cos\alpha\cos\beta\,\mathrm{sen}\,\beta)\ [1]. \end{aligned}$$

Combinando i primi due integrali con il terzo, e usando le espressioni ottenute di T, Π e G_x, troviamo i seguenti due integrali del moto W_1 e W_2 che si annullano per $\alpha=\beta=\dot\alpha=\dot\beta=0$:

$$W_1=\frac{1}{2}B(\dot\alpha^2\cos^2\beta+\dot\beta^2)+Rl(\cos\alpha\cos\beta-1)=\text{cost},$$

$$W_2=B(\dot\beta\,\mathrm{sen}\,\alpha-\dot\alpha\cos\alpha\cos\beta\,\mathrm{sen}\,\beta)+Ap(\cos\alpha\cos\beta-1)=\text{cost}.$$

Cercheremo la combinazione lineare con segno fissato degli integrali del moto $W_1-\lambda W_2$. Per prima cosa, determiniamo nelle quantità W_1 e W_2 i termini di grado più basso tra le piccole quantità α, β, $\dot\alpha$, $\dot\beta$:

$$W_1=\frac{1}{2}B(\dot\alpha^2+\dot\beta^2)-\frac{1}{2}Rl(\alpha^2+\beta^2)+\ \ldots,$$

$$W_2=B(\dot\beta\alpha-\dot\alpha\beta)-\frac{1}{2}Ap(\alpha^2+\beta^2)+\ \ldots;$$

allora

$$W_1-\lambda W_2=\frac{1}{2}[B\dot\alpha^2+2B\lambda\dot\alpha\beta+(Ap\lambda-Rl)\beta^2]+$$

$$+\frac{1}{2}[B\dot\beta^2-2B\lambda\dot\beta\alpha+(Ap\lambda-Rl)\alpha^2]+\ \ldots$$

Affinché ogni espressione nelle parentesi quadre sia definita positiva, è sufficiente che sia soddisfatta la seguente disuguaglianza:

$$B^2\lambda^2<B(Ap\lambda-Rl).$$

Semplificando per B e riordinando, otteniamo

$$B\lambda^2-Ap\lambda+Rl<0.$$

---

[1] Gli archi α, $\frac{\pi}{2}+\beta$ e $(x\zeta)$ formano un triangolo rettangolo sferico con «cateti» α e $\frac{\pi}{2}+\beta$, dunque

$$\cos(x\zeta)=\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=-\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta.$$

Poiché l'ultima disuguaglianza sia valida per un certo λ reale, è necessario che il trinomio di secondo grado del membro sinistro di questa disuguaglianza abbia radici reali, cioè deve esistere la disuguaglianza

$$A^2p^2 > 4BRl.$$

Questa è la condizione che assicura la stabilità del moto rotazionale del proiettile (per le « deviazioni » α, β, $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$) perché se questa condizione è soddisfatta, è possibile selezionare un valore reale di λ per cui l'integrale $W_1 - \lambda W_2$ abbia, in $\alpha = \beta = \dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0$, un minimo stretto uguale a zero.

§ 37. *Stabilità dei sistemi lineari*

Nel paragrafo precedente è stato illustrato che lo studio della stabilità di un processo definito da un sistema di equazioni differenziali ordinarie [1] si limita ad analizzare la stabilità della soluzione nulla di un sistema di equazioni delle deviazioni.

Le equazioni differenziali delle deviazioni siano lineari e abbiano coefficienti costanti

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Cercheremo una soluzione particolare di questo sistema nella forma

$$x_i = u_i e^{\lambda t} \quad \left(i = 1, \ldots, n; \sum_{i=1}^{n} |u_i|^2 > 0\right). \tag{2}$$

Sostituendo le espressioni (2) nelle equazioni (1) e dividendo per $e^{\lambda t}$, otteniamo le relazioni che legano le quantità richieste u_i e λ:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}u_k = \lambda u_i \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

oppure

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} - \lambda\delta_{ik})\, u_k = 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{4}$$

dove δ_{ik} è il simbolo di Kronecker

$$(\delta_{ik} = 1 \quad \text{per} \quad i = k, \quad \delta_{ik} = 0 \quad \text{per} \quad i \neq k).$$

Poiché nella soluzione cercata (2), almeno una delle costanti u_i deve essere diversa da zero, il determinante del sistema di equa-

[1] Si sa che un tale sistema può essere ordinariamente espresso come un sistema di equazioni differenziali del primo ordine risolto nelle derivate. Questa notazione è sempre possibile per un sistema di equazioni di Lagrange (vedi § 7).

zioni omogenee (4) deve essere nullo

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Dunque, per determinare λ, otteniamo un'equazione algebrica in λ di grado n.

L'equazione (5) è detta *equazione caratteristica* o *secolare* per la matrice dei coefficienti

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \right\|.$$

Le radici dell'equazione caratteristica sono dette *autovalori* della matrice A.

Considerando per λ un autovalore della matrice A, troveremo le costanti u_i del sistema di equazioni lineari (4) che corrispondono a questo numero.

Conviene, per ciò che segue, introdurre la notazione matriciale sia per il sistema iniziale (1) che per i sistemi delle relazioni (2) e (3).

Introduciamo i vettori colonna

$$x = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \right\|, \quad u = \left\| \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{matrix} \right\|.$$

Allora al posto delle (1), (2), (3) e (5) possiamo scrivere [1]

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{1'}$$

$$x = ue^{\lambda t}, \tag{2'}$$

$$Au = \lambda u \quad (u \neq 0), \tag{3'}$$

$$\det(A - \lambda E) = 0, \tag{5'}$$

dove $E = \| \delta_{ik} \|_{i,k=1}^{n}$ è la matrice unitaria.

[1] Per moltiplicare la matrice quadrata A per la colonna x, moltiplichiamo gli elementi della i-esima riga di A per il corrispondente elemento della colonna x e sommiamo tutti questi prodotti. La somma così ottenuta è l'i-esimo elemento della colonna Ax. La derivata della colonna $\frac{dx}{dt}$ si ottiene differenziando ogni elemento della colonna x.

La colonna $u \neq 0$ che, insieme al numero λ, soddisfa la relazione (3′) è detta *autovettore* della matrice A corrispondente all'autovalore λ. Così, in ogni soluzione del sistema (1′), avente forma (2′), λ è l'autovalore della matrice A, e u è il corrispondente autovettore.

Prima consideriamo il caso quando l'equazione caratteristica (5) ha n radici differenti λ_k ($k = 1, \ldots, n$). Ad ogni numero caratteristico λ_k corrisponde un autovettore u_k e una soluzione particolare del sistema (1) della forma $u_k e^{\lambda_k t}$. Una combinazione lineare di queste soluzioni con coefficienti costanti arbitrari

$$x = \sum_{k=1}^{n} C_k u_k e^{\lambda_k t} \tag{6}$$

sarà nuovamente una soluzione del sistema (1).

Per dimostrare che la formula (6) comprende tutte le soluzioni del sistema (1), dobbiamo prima dimostrare che i vettori colonna $u_1, u_2, \ldots, u_n$, che corrispondono agli autovalori distinti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, sono linearmente indipendenti.

Sia

$$\sum_{k=1}^{n} c_k u_k = 0. \tag{7}$$

Moltiplichiamo per la matrice A a sinistra ambo i membri della (7). Allora, usando le uguaglianze

$$A u_k = \lambda_k u_k \quad (u_k \neq 0, k = 1, \ldots, n),$$

troviamo

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k c_k u_k = 0. \tag{8}$$

Eliminiamo la costante c_1 dalla (7) e dalla (8):

$$\sum_{j=2}^{n} (\lambda_j - \lambda_1) c_j u_j = 0. \tag{9}$$

Moltiplichiamo nuovamente questa uguaglianza a sinistra per A e usiamo l'uguaglianza ottenuta insieme alla (9), per eliminare c_2 e così via. Finalmente otteniamo

$$(\lambda_n - \lambda_1)(\lambda_n - \lambda_2) \ldots (\lambda_n - \lambda_{n-1}) c_n u_n = 0, \tag{10}$$

dove $c_n = 0$. Poiché tutti i termini della (7) sono equivalenti, segue che

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0,$$

cioè non c'è nessuna relazione della forma (7) tra gli autovettori $u_1, u_2, \ldots, u_n$, dunque questi vettori sono linearmente indipendenti.

Ponendo $t = 0$ nella (6), abbiamo

$$x_0 = \sum_{k=1}^{n} C_k u_k. \tag{11}$$

Con un dato vettore iniziale arbitrario x_0, possiamo determinare in modo univoco C_k ($k = 1, \ldots, n$) dalla (11) per il fatto che i vettori $u_1, \ldots, u_n$ sono linearmente indipendenti. Dunque, la (6) comprende le soluzioni del sistema (1) che soddisfano le condizioni iniziali $x(0) = x_0$, cioè comprende tutte le soluzioni del sistema (1).

Nei corsi di teoria delle equazioni differenziali si dimostra che nel caso di radici multiple la formula (6) diventa piuttosto complicata. I cosiddetti « termini secolari » possono comparire nella formula che contiene un polinomio in t al posto del vettore costante u_k: $u_k + u'_k t + \ldots$. Nel caso generale, una soluzione arbitraria del sistema di equazioni differenziali (1) è determinata dalla formula

$$x = \sum_{k=1}^{n} C_k (u_k + u'_k t + \ldots) e^{\lambda_k t}. \tag{12}$$

Importanti corollari seguono subito dalle formule (6) e (12).

1. *Se tutti gli autovalori della matrice A hanno parte reale negativa, cioè*

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \operatorname{Re} \lambda_k = -\alpha < 0,$$

allora $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$, *e la soluzione nulla del sistema di equazioni differenziali* (1) *è asintoticamente stabile* [1].

Sia ora $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ per almeno un k. Allora il sistema (1) ha una soluzione non nulla $x = C_k u_k e^{\lambda_k t}$ che tende all'infinito per $t \to \infty$. Nello stesso tempo, il valore iniziale $x_0 = C_k u_k$ (per $t = 0$) può essere arbitrariamente piccolo, poiché C_k è una costante arbitraria. In questo caso, la soluzione $x = 0$ è instabile. Abbiamo così la proposizione:

2. *Se almeno un autovalore λ_k della matrice A ha parte reale positiva* ($\operatorname{Re} \lambda_k > 0$), *allora la soluzione nulla del sistema di equazioni differenziali* (1) *è instabile* [2].

Esempio. La posizione di equilibrio di un *oscillatore lineare* in un mezzo *con resistenza* proporzionale alla potenza prima della velocità sarà asintoticamente stabile. Infatti (vedi esempio 3 di pag. 167), l'equazione differenziale del moto $m\ddot{x} + 2f\dot{x} + cx = 0$ ($m, c, f > 0$) può essere espressa in forma

[1] Il numero $\alpha > 0$ è talvolta chiamato *grado di stabilità*.

[2] Se tutte le $\operatorname{Re} \lambda_k \leqslant 0$ ($k = 1, \ldots, n$) e se in almeno una di queste relazioni c'è un segno d'uguaglianza, allora la soluzione $x = 0$ sarà stabile, assicurato che nella (12) non ci sia nessun termine secolare in tutti i termini in cui $\operatorname{Re} \lambda_k = 0$. Altrimenti la soluzione $x = 0$ è instabile.

di un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine ponendo $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\frac{c}{m} x_1 - 2\frac{f}{m} x_2.$$

L'equazione caratteristica

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{c}{m} & -2\frac{f}{m} - \lambda \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 + 2\frac{f}{m}\lambda + \frac{c}{m} = 0$$

ha radici con parte reale negativa $-\frac{f}{m}$, che è quello che assicura la stabilità asintotica della posizione di equilibrio.

§ 38. *Stabilità nell'approssimazione lineare*

Nel sistema di equazioni differenziali (non lineari!)

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

sviluppiamo il membro destro in serie di potenze delle deviazioni $x_1, \ldots, x_n$:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k + f_i \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{1'}$$

dove f_i è la somma di tutti i termini dello sviluppo X_i dal secondo ordine in su delle $x_1, \ldots, x_n$ ($i = 1, \ldots, n$).

Nel caso stazionario, a_{ik} sono coefficienti costanti, e le funzioni f_i dipendono da $x_1, \ldots, x_n$ e non dipendono da t. Nel caso periodico, a_{ik} sono funzioni periodiche di t con periodo τ e i termini non lineari $f_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ sono anche periodici in t con periodo τ.

Se nella (1') eliminiamo tutti i termini non lineari f_i, otteniamo un sistema lineare di equazioni differenziali che è chiamato *approssimazione lineare* per il sistema non lineare (1).

Alla fine dell'altro secolo fu stabilito negli studi di Poincaré e di Ljapunov che sia nel caso stazionario che in quello periodico si può stimare la stabilità della soluzione nulla di un sistema non lineare (1) in base all'approssimazione lineare, cioè *dalla stabilità asintotica della soluzione nulla di un'approssimazione lineare segue la stabilità asintotica della soluzione nulla di un sistema non lineare* [1]. Questa proposizione trova larghe applicazioni, poiché

[1] Qui è stato assunto che i membri destri $X_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ sono funzioni continue. Attualmente si sa cosa si intende con l'approssimazione lineare per membri destri di X_i discontinui, ed è stato stabilito un appropriato criterio di stabilità basato su un'approssimazione lineare sia nel caso periodico che in certi casi non periodici. Vedi M.A. Ajzerman e F.R. Gantmacher, « Matematica applicata e meccanica », vol. 21, fasc. 5, 1955; I.V. Livartovskij, « Matematica applicata e meccanica », vol. 23, fasc. 3, 1959 (ed. russa).

lo studio dei sistemi lineari è sostanzialmente più semplice di quello dei sistemi non lineari.

Ci limiteremo a considerare il caso stazionario e scriveremo dunque il sistema (1') in forma di matrice al fine di dimostrare la nostra osservazione:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x). \tag{1''}$$

Qui $A = \| a_{ik} \|_{i,\,k=1}^{n}$ è la matrice quadrata con elementi costanti, e $f(x)$ è una colonna con elementi $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Dato che è stato assunto che la soluzione nulla di un'approssimazione lineare è asintoticamente stabile, segue (vedi § 37) che tutti i numeri caratteristici $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ della matrice A hanno parte reale negativa

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \operatorname{Re} \lambda_k = -\alpha < 0. \tag{2}$$

Possiamo convenire di denotare la « lunghezza » del vettore colonna z di componenti $z_1, \ldots, z_n$ con $| z |$:

$$| z | = \Big(\sum_{k=1}^{n} | z_k |^2 \Big)^{1/2}. \tag{3}$$

Poiché ogni elemento della colonna $f(x)$ ha termini dal secondo grado in su, segue che

$$| f(x) | \leqslant \varepsilon | x |, \tag{4}$$

dove la costante $\varepsilon > 0$ può essere scelta arbitrariamente piccola se limitiamo la variazione delle variabili $x_1, \ldots, x_n$ ad un intorno sufficientemente piccolo $| x | < \Delta$.

La **dimostrazione** [1] di Poincaré e Ljapunov si può basare sul seguente lemma.

Lemma. *Usando la trasformazione lineare non singolare delle variabili*

$$x = Uy \quad (\det U \neq 0) \tag{5}$$

il sistema lineare di equazioni differenziali $\frac{dx}{dt} = Ax$ *può essere ridotto alla forma « triangolare »* [2]

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1 + b_{12} y_2 + \ldots + b_{1n} y_n, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = \lambda_2 y_2 + \ldots + b_{2n} y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = \lambda_n y_n, \end{cases} \tag{6}$$

[1] Vedi J. J. Stoker, *Nonlinear vibrations in mechanical and electrical system*, Londra, Pubblicato da Interscience, 1950.

[2] Come risultato della trasformazione (5), la matrice dei coefficienti A è sostituita dalla matrice $U^{-1}AU$, che è di forma triangolare.

dove $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *sono gli autovalori della matrice* A, *mentre i moduli dei coefficienti «non diagonali»* b_{ik} $(i < k)$ *possono essere presi arbitrariamente piccoli scegliendo in modo adeguato la trasformazione* (5) [1].

Applichiamo la trasformazione (5) al sistema non lineare (1″). Il sistema (1″) sarà espresso nelle nuove variabili come segue:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1 + b_{12} y_2 + \ldots + b_{1n} y_n + g_1(y), \\ \frac{dy_2}{dt} = \lambda_2 y_2 + \ldots + b_{2n} y_n + g_2(y), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dt} = \lambda_n y_n + g_n(y), \end{cases} \tag{7}$$

dove la colonna $g(y)$ con gli elementi $g_1(y), \ldots, g_n(y)$ è definita dall'uguaglianza

$$g(y) = U^{-1} f(Uy) \tag{8}$$

e soddisfa la disuguaglianza [2]

$$|g(y)| < \eta |y|, \tag{9}$$

dove il numero η (come il numero ε) può essere scelto arbitrariamente piccolo considerando un intorno $|x| < \Delta$ sufficientemente piccolo (e, rispettivamente, $|y| < \Delta_1$).

Allora, in accordo con le equazioni (7) e le disuguaglianze (2) e (9), troviamo [3]

$$|y| \frac{d|y|}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y|^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} y_i \bar{y}_i =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i \frac{d\bar{y}_i}{dt} + \bar{y}_i \frac{dy_i}{dt}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}\ \lambda_i |y_i|^2 +$$

---

[1] La dimostrazione di questo lemma è data a pag. 196.

[2] Se definiamo la norma della matrice $A = \| a_{ik} \|_{i,k=1}^{n}$ dall'uguaglianza $\|A\| = \left(\sum_{i,k=1}^{n} |a_{ik}|^2\right)^{1/2}$ è facile verificare la validità della disuguaglianza

$$|Ax| \leqslant \|A\| \, |x|.$$

Dunque, dalla disuguaglianza (4) e dall'uguaglianza (8) segue che

$$|g(y)| \leqslant \|U^{-1}\| \, |f(Uy)| \leqslant \varepsilon \, \|U^{-1}\| \, \|U\| \, |y|$$

e così, la disuguaglianza (9) può essere così espressa

$$\eta = \|U\| \, \|U^{-1}\| \, \varepsilon.$$

[3] Con $\bar{y}_k$ denotiamo un numero che è complesso coniugato di y_k $(k = 1, \ldots, n)$.

$$+\frac{1}{2}\sum_{i>k}(b_{ik}y_k\bar{y}_i+\bar{b}_{ik}\bar{y}_k y_i)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(g_i\bar{y}_i+\bar{g}_i y_i)\leqslant$$

$$\leqslant(-\alpha+\delta+\eta)\,|\,y\,|^2 \quad \left(\delta=\sum_{i<k}|\,b_{ik}\,|\right),$$

cioè

$$\frac{d\,|\,y\,|}{dt}\leqslant(-\alpha+\delta+\eta)\,|\,y\,|,$$

da cui

$$|\,y\,|\leqslant|\,y_0\,|\,e^{(-\alpha+\delta+\eta)(t-t_0)} \quad (y_0=y\,(t_0)). \tag{10}$$

Scegliamo i numeri positivi δ e η in modo tale che le disuguaglianze $\alpha-\delta>0$ e $\eta<\alpha-\delta$ siano vere; allora segue dalla (10) che

$$|\,y\,|\leqslant|\,y_0\,| \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\infty}y\,(t)=0, \tag{11}$$

cioè la soluzione $y=0$ del sistema (7) è asintoticamente stabile. Ma i vettori x e y sono legati dalla trasformazione lineare (5); dunque la soluzione $x=0$ del sistema (1) è asintoticamente stabile [1].

Dimostrazione del lemma. Prima di tutto dimostreremo che con l'aiuto di una trasformazione $x=U^{(1)}z$ della forma (5) è possibile ridurre il sistema di equazioni differenziali

$$\frac{dx}{dt}=Ax \tag{12}$$

ad una forma in cui: 1) la prima variabile z_1 non compare a destra di tutte le equazioni a cominciare dalla seconda e 2) nella prima equazione il coefficiente di z_1 è uguale all'autovalore λ_1 della matrice A, cioè alla seguente forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt}=\lambda_1 z_1+b'_{12}z_2+\ldots+b'_{1n}z_n, \\ \dfrac{dz_2}{dt}=\quad\ b'_{22}z_2+\ldots+b'_{2n}z_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dz_n}{dt}=\quad\ b'_{n2}z_2+\ldots+b'_{nn}z_n. \end{cases} \tag{13}$$

A questo scopo, è sufficiente, per la prima colonna della matrice $U^{(1)}$, considerare l'autovettore u_1 che corrisponde all'autovalore $\lambda_1(Au_1=\lambda_1u_1,\ u_1\neq 0)$ e scegliere le altre colonne della matrice $u_2,\ \ldots,\ u_n$ in modo tale che siano, insieme ad u_1, linearmente indipendenti (allora $\det U^{(1)}\neq 0$).

[1] In accordo con la nota (1) della pagina precedente, dall'uguaglianza (5) segue la disuguaglianza

$$|\,x\,|\leqslant\|\,U\,\|\,|\,y\,|\leqslant\|\,U\,\|\,|\,y_0\,|\leqslant\|\,U\,\|\,\|\,U^{-1}\,\|\,|\,x_0\,|.$$

Infatti, la trasformazione $x = U^{(1)}z$ può essere scritta anche come segue:

$$x = u_1 z_1 + u_2 z_2 + \ldots + u_n z_n, \tag{14}$$

dove $z_1, \ldots, z_n$ sono le coordinate del vettore x nella base $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Il sistema (12) ha la soluzione

$$x = u_1 e^{\lambda_1 t}. \tag{15}$$

Dunque, il sistema trasformato di equazioni differenziali

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} b'_{ik} z_k \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{16}$$

in accordo con la (13), ha la soluzione

$$z_1 = e^{\lambda_1 t}, \quad z_2 = \ldots = z_n = 0 \tag{15'}$$

che è possibile solo per $b'_{11} = \lambda_1$, $b'_{21} = \ldots = b'_{n1} = 0$, cioè quando il sistema (16) ha la forma (13).

Poiché in una trasformazione lineare non singolare l'equazione caratteristica della matrice A non cambia [1], allora la matrice $\| b_{jk} \|_2^n$ ha come autovalori i rimanenti $n - 1$ autovalori $(\lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ della matrice A.

Applicando una simile trasformazione al sistema delle ultime $n - 1$ equazioni (13) e così via, possiamo finalmente, con l'aiuto di una trasformazione lineare non singolare, ridurre il sistema di equazioni differenziali iniziale alla forma

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = \lambda_1 z_1 + b'_{12} z_2 + \ldots + b'_{1n} z_n, \\ \dfrac{dz_2}{dt} = \lambda_2 z_2 + \ldots + b'_{2n} z_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dz_n}{dt} = \lambda_n z_n. \end{cases} \tag{17}$$

Finalmente, eseguiamo la trasformazione delle variabili

$$z_k = \mu^k y_k \quad (\mu > 0;\ k = 1, \ldots, n).$$

---

[1] Le equazioni caratteristiche delle matrici A e $U^{-1}AU$ (vedi nota di pag. 194) coincidono, poiché

$$U^{-1}(A - \lambda E)\, U = U^{-1}AU - \lambda E$$

e dunque

$$\det (U^{-1}AU - \lambda E) = \det U^{-1} \det (A - \lambda E) \det U = \det (A - \lambda E),$$

(E è la matrice unitaria).

Allora il sistema (17) sarà sostituito dal sistema (6) in cui i coefficienti non diagonali $b_{ik} = \mu^{k-i} b'_{ik}$ $(i < k)$ possono essere scelti arbitrariamente piccoli in valore assoluto se il numero $\mu > 0$ è sufficientemente piccolo. Il lemma è così dimostrato.

§ 39. *Criteri di stabilità asintotica di sistemi lineari*

Nei precedenti due paragrafi è stato stabilito che nel caso stazionario la soluzione nulla di un sistema arbitrario (non lineare) di equazioni differenziali nelle deviazioni è asintoticamente stabile se tutte le radici dell'equazione caratteristica composta per la matrice dei coefficienti di una approssimazione lineare hanno parti reali negative. Dunque, diventano di grandissima importanza *le condizioni necessarie e sufficienti affinché tutte le radici dell'equazione algebrica con coefficienti reali*

$$f(\lambda) \equiv a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (a_0 > 0) \quad (1)$$

abbiano parte reale negativa.

Denotiamo con λ_k $(k = 1, \ldots, g)$ le radici reali e con $r_j \pm is_j$ $\left(j = 1, \ldots, \frac{n-g}{2}\right)$ quelle complesse dell'equazione (1), e assumiamo che nel piano complesso tutte queste radici si trovino a sinistra dell'asse immaginario, cioè

$$\lambda_k < 0, \quad r_j < 0 \quad \left(k = 1, \ldots, g;\ j = 1, \ldots, \frac{n-g}{2}\right). \qquad (2)$$

Allora

$$f(\lambda) = a_0 \sum_{k=1}^{g} (\lambda - \lambda_k) \prod_{j=1}^{\frac{n-g}{2}} (\lambda - r_j - is_j)(\lambda - r_j + is_j) =$$

$$= a_0 \prod_{k=1}^{g} (\lambda - \lambda_k) \prod_{j=1}^{\frac{n-g}{2}} (\lambda^2 - 2r_j\lambda + r_j^2 + s_j^2). \qquad (3)$$

Poiché, dalle disuguaglianze (2), ogni fattore nell'ultima parte della (3) ha coefficienti positivi, segue che nella (1) tutti i coefficienti sono positivi. *La positività di tutti i coefficienti è (per* $a_0 > 0$*) una condizione necessaria ma non sufficiente affinché tutte le radici dell'equazione* (1) *siano localizzate sul semiasse immaginario sinistro.*

Nel 1875 lo studioso inglese Routh, già conosciuto dal lettore, elaborò un algoritmo per mezzo del quale è possibile, usando i coefficienti del polinomio $f(\lambda)$, determinare se il polinomio è « stabile », cioè se tutte le sue radici hanno parte reale negativa. Nel 1895 il matematico tedesco Hurwitz, indipendentemente da Routh, stabilì lo stesso criterio in una forma modificata con l'aiu-

to dei determinanti (i determinanti di Hurwitz):

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \ \ldots, \ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots\ldots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots\ldots \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots\ldots \\ 0 & a_0 & a_2 & \ldots\ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \ldots\ldots & & & a_n \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

(Qui $a_p = 0$ per $p > n$ ovunque).

Condizione di Routh — Hurwitz [1]. *Affinché tutte le radici dell'equazione* (1) *abbiano parte reale negativa, è necessario e sufficiente che valgano le seguenti disuguaglianze*:

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \ \ldots, \quad \Delta_n > 0. \qquad (5)$$

Se i coefficienti della (1) sono numeri, allora le condizioni (5) sono subito verificate. Ma se i coefficienti della (1) contengono parametri letterali, allora il calcolo dei determinanti Δ_k per k grande è piuttosto complicato.

È dunque interessante esaminare le altre condizioni stabilite nel 1914 dai matematici francesi Liénard e Chipart. In queste condizioni, il numero di disuguaglianze determinanti è approssimativamente la metà che nelle condizioni (5) di Routh e Hurwitz.

Condizioni di Liénard — Chipart. *Affinché un polinomio* $f(\lambda) \equiv a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$, *per* $a_0 > 0$, *abbia tutte le radici con parte reale negativa, è necessario e sufficiente che*

1) *tutti i coefficienti del polinomio* $f(\lambda)$ *siano positivi*

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \ \ldots, \ a_n > 0;$$

2) *le disuguaglianze dei determinanti*

$$\Delta_{n-1} > 0, \quad \Delta_{n-3} > 0, \ \ldots \qquad (7)$$

siano vere (*qui, come prima,* Δ_k *denota il determinante di Hurwitz di k-esimo ordine* [2]).

Verremo ora a conoscenza del *criterio geometrico della stabilità*. Nell'uguaglianza [3]

$$f(\lambda) = a_0 \prod_{k=1}^{n} (\lambda - \lambda_k)$$

---

[1] Per la deduzione delle condizioni di Routh — Hurwitz vedi, per esempio, F.R. Gantmacher, *Teoria delle matrici*, cap. XV, § 6; M.A. Ajzerman, *Lezioni sulla teoria del controllo automatico*, 2 edizione, cap. III, § 1 (ed. russa).

[2] Per la deduzione delle condizioni di Liénard — Chipart ed alcune altre varianti di queste condizioni vedere il libro *Teoria delle matrici*, cap. XV, § 3.

[3] Qui, le n radici del polinomio $f(\lambda)$ sono indicate con $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

sostituiamo λ con $i\omega$ e facciamo variare ω da $-\infty$ a $+\infty$. Calcoliamo l'appropriato incremento dell'angolo $\theta = \arg f(i\omega)$:

$$\Delta_{-\infty}^{+\infty}\theta(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg(i\omega - \lambda_k).$$

Osserviamo ora che[1] (fig. 47)

$$\Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg(i\omega - \lambda_k) = \begin{cases} \pi \text{ se } \operatorname{Re}\lambda_k < 0. \\ -\pi \text{ se } \operatorname{Re}\lambda_k > 0. \end{cases}$$

Dunque, denotando con l e r rispettivamente il numero di radici che stanno a sinistra e quelle che stanno a destra dell'asse imma-

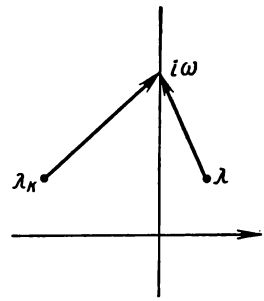


Fig. 47

ginario ($l + r = n$), avremo

$$\Delta_{-\infty}^{+\infty}\theta(\omega) = (l - r)\pi.$$

Consideriamo la curva descritta dall'« affix »[2] del numero complesso $f(i\omega)$ con ω che varia da $-\infty$ a $+\infty$. Questa curva si divide in due rami: su un ramo $\omega > 0$, sull'altro $\omega < 0$. Un ramo è la copia speculare dell'altro rispetto all'asse reale, poiché $f(i\omega)$ e $f(-i\omega)$ sono numeri complessi coniugati. Per questa ragione, denotando con Δ_0^{∞} l'incremento di ω che varia da 0 a ∞, otteniamo

$$\Delta_0^{\infty}\theta(\omega) = \frac{1}{2}\Delta_{-\infty}^{+\infty}\theta(\omega) = (l - r)\frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

Da cui si vede che tutte le radici saranno localizzate a sinistra dell'asse immaginario ($l = n$, $r = 0$) quando e solo quando

$$\Delta_0^{\infty}\theta(\omega) = n\frac{\pi}{2}. \tag{9}$$

[1] Assumiamo qui che nessuna delle radici λ_k giace sull'asse immaginario.

[2] L'« affix » di un numero complesso z è un punto appropriato nel piano complesso z.

Criterio geometrico di stabilità [1]. *Perché un polinomio* $f(\lambda)$ *sia stabile, cioè affinché tutte le sue radici siano localizzate a sinistra dell'asse immaginario, è necessario e sufficiente:*

1) *che l'odografo di* $f(i\omega)$, *con* ω *che varia da* 0 *a* ∞, *non passi per il punto zero* [2] *e*

2) *che per questo odografo*

$$\Delta_0^{\infty}\theta = n\frac{\pi}{2},$$

dove n è il grado del polinomio $f(\lambda)$ (vedi fig. 48 per $n = 6$).

Osserviamo che per un polinomio [3] stabile l'argomento θ varia *monotonamente* come ω varia da 0 a ∞. Questo segue dalla

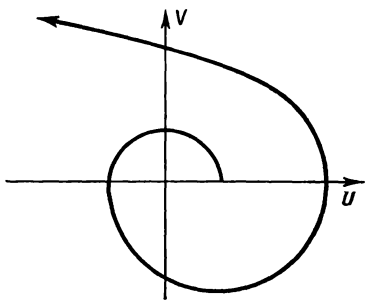


Fig. 48

formula

$$\theta(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \arg(i\omega - \lambda_k)$$

dato che per questo polinomio ogni termine del membro destro è una funzione crescente monotona di ω.

Esempio. Sia $f(\lambda) = \lambda^5 + 5\lambda^4 + 10\lambda^3 + 11\lambda^2 + 7\lambda + 2$. Allora $f(i\omega) = U(\omega) + iV(\omega)$, dove

$$U(\omega) = 5\omega^4 - 11\omega^2 + 2, \qquad V(\omega) = \omega(\omega^4 - 10\omega^2 + 7).$$

Per costruire l'odografo di $f(i\omega)$ osserviamo che $U(0) = 2$ e che $V(\omega)$ si annulla per $\omega = 0$ e per $\omega = \omega_1$, $\omega = \omega_2$ $(0 < \omega_1 < \omega_2)$; i quadrati ω_1^2

---

[1] Questo criterio fu applicato per la prima volta da A.V. Mikhajlov per studiare i sistemi di controllo automatici. Per questa ragione nella letteratura tecnica, il criterio geometrico di stabilità è frequentemente chiamato *criterio di Mikhajlov.*

[2] La condizione 1) significa che $f(\lambda)$ non ha nessuna radice puramente immaginaria.

[3] Il polinomio stabile è anche detto *polinomio di Hurwitz.*

e ω_2^2 sono determinati dall'equazione quadratica

$$\omega_1^2 = 5 - \sqrt{18} \approx 0{,}76; \qquad \omega_2^2 = 5 + \sqrt{18} \approx 9{,}24.$$

Si vedrà rapidamente che $U(\omega_1) < 0$, $U(\omega_2) > 0$. Inoltre, $V'(0) = 7 > 0$.

Così, per $\omega = 0$ l'odografo inizia sull'asse reale positivo, prima sale, interseca l'asse immaginario positivo, quindi l'asse reale negativo (per $\omega = \omega_1$), l'asse immaginario negativo, e, finalmente, di nuovo l'asse reale positivo (per $\omega = \omega_2$). Per $\omega > \omega_2$, l'odografo non interseca più gli assi delle coordinate, e cresce all'infinito nel quinto quadrante ($U > 0$, $V > 0$), poiché $n = 5$. Qui, $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{V(\omega)}{U(\omega)} \to +\infty$ quando $\omega \to +\infty$. Dunque,

$$\Delta_0^{\infty}\theta = 5\,\frac{\pi}{2},$$

cioè $f(\lambda)$ è un polinomio stabile.

Potremmo arrivare alla stessa conclusione partendo dal precedente criterio di Liénard — Chipart, poiché tutti i coefficienti in $f(\lambda)$ sono positivi e

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} > 0, \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 11 & 2 & 0 \\ 1 & 10 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 11 & 2 \\ 0 & 1 & 10 & 7 \end{vmatrix} > 0.$$

VI. Piccole oscillazioni

§ 40. *Piccole oscillazioni di un sistema conservativo*

Se in un istante di tempo iniziale la posizione di un sistema scleronomo è scelta sufficientemente vicina ad una posizione di equilibrio stabile e le velocità iniziali sono sufficientemente piccole in valore assoluto, allora per tutti i moti sia le deviazioni dalla posizione di equilibrio che le velocità generalizzate saranno piccole in valore assoluto. Questo fatto permette di considerare nelle equazioni differenziali del moto solo i termini lineari delle deviazioni e delle velocità e di trascurare i termini di ordine più alto. Allora le equazioni differenziali del moto diventano lineari, cioè il problema è « linearizzato ». In questo paragrafo considereremo la linearizzazione delle equazioni del moto per un sistema conservativo.

Le energie cinetica e potenziale di un sistema conservativo con n gradi di libertà sono espresse in funzione delle coordinate indipendenti q_i e delle velocità generalizzate $\dot{q}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ nel seguente modo:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(q_1, \ldots, q_n)\, \dot{q}_i \dot{q}_k, \qquad \Pi = \Pi(q_1, \ldots, q_n). \tag{1}$$

Come nel precedente capitolo, assumiamo che l'origine delle coordinate $q_1 = \ldots = q_n = 0$ sia una posizione di equilibrio e che in questa posizione $\Pi = 0$. Sviluppiamo in serie di potenze delle coordinate i coefficienti a_{ik} $(q_1, \ldots, q_n)$:

$$a_{ik}(q_1, \ldots, q_n) = a_{ik} + \ldots \qquad (i, k = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

dove $a_{ik} = a_{ik}(0, \ldots, 0)$ $(a_{ik} = a_{ki};\ i, k = 1, \ldots, n)$ sono costanti. Sostituendo queste espressioni per i coefficienti nella formula per l'energia cinetica (1), abbiamo

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k + (**), \tag{3}$$

dove con (**) contrassegnamo la somma dei termini di ordine maggiore del secondo nelle variabili q_i e $\dot{q}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Si sviluppi in serie di potenze delle coordinate anche l'energia potenziale:

$$\Pi = \Pi_0 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right)_0 q_i + \frac{1}{2} \sum_{i,\,k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i\, \partial q_k}\right)_0 q_i q_k + (**).$$

Per ipotesi, $\Pi_0 = 0$. Inoltre, le forze generalizzate nella posizione di equilibrio sono nulle:

$$Q_i^0 = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right)_0 = 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Dunque, introducendo la notazione

$$c_{ik} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i\, \partial q_k}\right)_0 \quad (c_{ik} = c_{ki};\ i, k = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

possiamo anche rappresentare l'energia potenziale nella forma

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,\,k=1}^{n} c_{ik} q_i q_k + (**). \tag{5}$$

Trascurando i termini di ordine maggiore del secondo delle variabili q_i e $\dot{q}_k$ nelle formule (3) e (5), possiamo rappresentare l'energia cinetica e quella potenziale come forme quadratiche con coefficienti costanti:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,\,k=1}^{n} c_{ik} q_i q_k, \tag{6}$$

dove $a_{ik} = a_{ki}$, $c_{ik} = c_{ki}$ $(i, k = 1, \ldots, n)$.

Per il significato fisico dell'energia cinetica è chiaro che avremo sempre $T \geqslant 0$. Per il fatto che assumiamo che la posizione di equilibrio non sia un punto singolare [1], allora si ha sempre $T > 0$ solo se non tutte le velocità generalizzate sono simultaneamente nulle, cioè la forma quadratica $\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = 2T$ è definita positiva

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k > 0 \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i^2 > 0\right). \tag{7}$$

Dunque, per assicurare la stabilità di una data posizione di equilibrio, chiediamo che (in accordo con il teorema di Lagrange) l'energia potenziale abbia un minimo stretto nella posizione di equilibrio. Poiché $\Pi_0 = 0$, ciò significa che in un certo intorno dell'origine

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} c_{ik} q_i q_k > 0 \quad \left(\sum_{i=1}^{n} q_i^2 > 0\right). \tag{8}$$

[1] Vedi nota di pag. 48.

Ma la forma quadratica (8) è una funzione omogenea quadratica delle coordinate. Dunque, la disuguaglianza (8) vale in tutto lo spazio, eccetto che nell'origine, dove questa forma si annulla. In altre parole, l'energia potenziale è ora rappresentata come una forma quadratica definita positiva nelle coordinate [1].

Scriviamo le equazioni di Lagrange, procedendo dalle espressioni (6) per T e Π:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\ddot{q}_k + c_{ik}q_k) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Cerchiamo una soluzione particolare di questo sistema di equazioni differenziali lineari nella forma

$$q_i = u_i \operatorname{sen} (\omega t + \alpha) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{10}$$

cioè nella forma di oscillazioni armoniche con una stessa frequenza ω e con la stessa costante α per tutte le coordinate.

Sostituendo nelle equazioni differenziali (9) le espressioni (10) di q_i e ponendo

$$\lambda = \omega^2, \tag{11}$$

otteniamo, dopo aver diminuito di $\operatorname{sen} (\omega t + \alpha)$, il seguente sistema di equazioni algebriche, lineari rispetto alle ampiezze u_i [2]:

$$\sum_{k=1}^{n} (c_{ik} - \lambda a_{ik}) u_k = 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{12}$$

Poiché tutte le ampiezze u_i dell'oscillazione cercata non devono annullarsi, il determinante del sistema di equazioni omogenee (12) deve essere uguale a zero:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda a_{11} & c_{12} - \lambda a_{12} & \ldots & c_{1n} - \lambda a_{1n} \\ c_{21} - \lambda a_{21} & c_{22} - \lambda a_{22} & \ldots & c_{2n} - \lambda a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} - \lambda a_{n1} & c_{n2} - \lambda a_{n2} & \ldots & c_{nn} - \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

---

[1] Naturalmente, sono possibili dei casi in cui la funzione $\Pi(q_1, \ldots q_n)$, prima di eliminare i termini (**), abbia un minimo stretto nell'origine, e dopo l'eliminazione di questi termini abbia un minimo non stretto nello stesso punto (per esempio, $\Pi = c^2 (q_1 + \ldots + q_n)^2 + d^2 (q_1^4 + \ldots + q_n^4)$, $c > 0$, $d > 0$). Ma consideriamo questi casi come casi particolari, e li escludiamo. In questi casi particolari, l'eliminazione dei termini (**) nell'espressione di Π non è giustificata poiché si può distorcere completamente il grafico del moto.

[2] Chiamiamo u_i l'ampiezza dell'oscillazione armonica (10) delle coordinate q_i, sebbene il valore assoluto $|u_i|$ sia l'ampiezza; la fase iniziale (per $t = 0$) delle oscillazioni armoniche (10) è α (per $u_i > 0$) oppure $-\alpha$ (per $u_i < 0$).

Sviluppando il determinante, otteniamo come membro sinistro un polinomio in λ di grado n. Così, il quadrato della frequenza $\lambda = \omega^2$ della soluzione armonica desiderata (10) deve soddisfare l'equazione algebrica di n-simo grado (13), che è detta *equazione secolare* o *equazione delle frequenze.*

Ad ogni radice λ della (13) corrisponde una soluzione particolare (10) (per un'arbitraria costante α) del sistema di equazioni differenziali (9). In questa soluzione $\omega = \sqrt{\lambda}$.

Scriviamo le suddette formule in forma matriciale. Introduciamo due matrici simmetriche definite positive [1]

$$A = \| a_{ik} \| = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \quad C = \| c_{ik} \| = \begin{Vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{Vmatrix} \tag{14}$$

e i vettori colonna

$$q = \begin{Vmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{Vmatrix}, \quad u = \begin{Vmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{Vmatrix} \tag{15}$$

(u è il vettore ampiezza). Allora il sistema di equazioni differenziali (9) sarà scritto come

$$A\ddot{q} + Cq = 0. \tag{16}$$

La soluzione particolare (10) sarà vista come

$$q = u \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) \tag{17}$$

e il risultato della sostituzione della soluzione (17) nell'equazione (16), cioè il sistema di equazioni algebriche (12), avrà la forma

$$(C - \lambda A)\, u = 0 \quad (\lambda = \omega^2). \tag{18}$$

L'equazione delle frequenze sarà scritta come

$$\det(C - \lambda A) = 0 \quad (\lambda = \omega^2). \tag{19}$$

Per calcolare se le radici λ dell'equazione secolare (19) siano sempre reali e positive, prima consideriamo alcune proprietà delle forme quadratiche con coefficienti reali.

Ad ogni forma quadratica $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_i u_k$ corrisponde una data forma bilineare $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_i v_k$ per cui introduciamo la notazione abbreviata

$$A(u, v) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_i v_k.$$

[1] La matrice simmetrica $A = \| a_{ik} \|_1^n$ è detta definita positiva se la forma quadratica $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} q_i q_k$ ad essa corrispondente è definita positiva.

Allora la forma quadratica sarà scritta come

$$A(u, u) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_i u_k.$$

Le seguenti proprietà di una forma bilineare sono rapidamente verificabili:

1. $A(u_1 + u_2, v) = A(u_1, v) + A(u_2, v)$.

2. $A(\lambda u, v) = \lambda A(u, v)$ (λ è uno scalare).

3. $A(u, v) = A(v, u)$ [1].

Mostriamo anche che per ogni vettore u

4. $A(u, \bar{u})$ è un numero reale [2].

Infatti, ponendo $u = v + iw$ (v e w sono vettori colonna reali) troviamo, per le 1-3,

$$A(u, \bar{u}) = A(v + iw, v - iw) =$$
$$= A(v, v) - iA(v, w) + iA(w, v) + A(w, w) =$$
$$= A(v, v) + A(w, w). \quad (20)$$

L'ultima espressione è ovviamente reale.

Dalla (20) segue anche che

5. Se $A(u, u)$ è una forma quadratica definita positiva e se $u \neq 0$ è un arbitrario vettore complesso, allora

$$A(u, \bar{u}) > 0 \quad (u \neq 0). \quad (21)$$

Infatti, assumendo $u = v + iw$ abbiamo $A(v, v) \geqslant 0$, e $A(w, w) \geqslant 0$. In una di queste relazioni abbiamo il segno $>$, poiché da $u \neq 0$ segue una delle disuguaglianze $v \neq 0$, $w \neq 0$. Allora dall'uguaglianza (20) segue la disuguaglianza (21).

Dimostriamo ora che

6. Se λ è una radice dell'equazione secolare, $\det(C - \lambda A) = 0$, e se u è il vettore ampiezza ad esso corrispondente (vedi la (18))

$$Cu = \lambda A u \quad (u \neq 0), \quad (22)$$

allora per ogni vettore v

$$C(u, v) = \lambda A(u, v). \quad (23)$$

Infatti, nella notazione secolare, la (22) assume la forma

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik} u_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_k \quad (i = 1, \ldots, n). \quad (22')$$

[1] A differenza delle uguaglianze 1 e 2 l'uguaglianza 3 vale solo per una forma bilineare con matrice dei coefficienti simmetrica.

[2] La barra indica la transizione nelle quantità complesse coniugate. La proprietà 4 è valida solo per una matrice simmetrica con elementi reali.

Moltiplicando entrambi i membri della i-esima equazione della (22′) per v_i e sommando su i, otteniamo

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} c_{ik} v_i u_k = \lambda \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} v_i u_k,$$

che è l'uguaglianza (23).

Mostriamo ora che *per ogni coppia di vettori ampiezza* u *e* u' *corrispondenti alle radici differenti* λ *e* λ' $(\lambda \neq \lambda')$ *dell'equazione secolare è valida la seguente relazione* [1]:

$$A(u, u') = 0. \tag{24}$$

Infatti, in accordo con la 6, sono valide le due equazioni

$$C(u, u') = \lambda A(u, u'), \quad C(u, u') = \lambda' A(u, u'). \tag{25}$$

Ma $\lambda \neq \lambda'$. Dunque, dalle uguaglianze (25) segue la relazione (24) [2].

Ora dimostriamo che *per la natura simmetrica delle matrici* A *e* C *e per la positività della matrice* A *segue che l'equazione secolare* (13) (o (19)) *ha solo radici reali.*

Infatti, sia λ una radice complessa dell'equazione secolare $(\lambda \neq \overline{\lambda})$ e sia $u \neq 0$ il vettore complesso ad essa corrispondente. Allora $\overline{\lambda}$ è anche una radice dell'equazione secolare con vettore ampiezza $\overline{u}$. Poiché $\lambda \neq \overline{\lambda}$, segue, da ciò che è stato dimostrato, che $A(u, \overline{u}) = 0$, ma questo contraddice la disuguaglianza (21).

Se λ è reale, allora anche il vettore ampiezza $u \neq 0$ ad essa corrispondente può essere scelto reale. Ora, ponendo $v = u$ nella (23) e osservando che $A(u, u) > 0$, troviamo che

$$\lambda = \frac{C(u, u)}{A(u, u)}. \tag{26}$$

Ma nel nostro caso la forma quadratica $C(u, u) = \sum_{i,\,k=1}^{n} c_{ik} u_i u_k$ è ancora definita positiva. Allora non solo vale $A(u, u) > 0$, ma anche $C(u, u) > 0$. Dunque, $\lambda > 0$.

---

[1] Se introduciamo nello spazio ad n dimensioni una metrica A, cioè assumiamo che il quadrato della lunghezza del vettore u sia la grandezza della forma quadratica

$$A(u, u) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_i u_k$$

allora $A(u, u')$ è il « prodotto scalare » dei vettori u e u' in questa metrica. Dunque, l'uguaglianza (3) esprime la seguente proprietà dei vettori ampiezza: *i vettori ampiezza corrispondenti a radici differenti dell'equazione secolare sono sempre mutuamente ortogonali nella metrica* A.

[2] In virtù delle uguaglianze (25), $A(u, u') = 0$ è verificata con $C(u, u') = 0$.

Così, l'equazione secolare (13) ha n radici positive λ_j, alle quali corrispondono le frequenze reali positive $\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$ ed i vettori ampiezza reali u_j $(j = 1, \ldots, n)$.

Consideriamo dapprima il caso in cui tutte le radici dell'equazione secolare sono distinte. Ad ogni λ_j corrisponde una soluzione particolare

$$q = u_j \operatorname{sen}(\omega_j t + \alpha_j) \quad (\omega_j = \sqrt{\lambda_j}) \tag{27}$$

con vettore ampiezza u_j, le cui coordinate $u_{1j}, \ldots, u_{nj}$ devono soddisfare il sistema di equazioni lineari

$$\sum_{k=1}^{n} (c_{ik} - \lambda a_{ik}) u_{kj} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{28}$$

o nella notazione matriciale

$$(C - \lambda_j A) u_j = 0. \tag{29}$$

Poiché il sistema di equazioni differenziali (9) (o (16)) è lineare, la combinazione lineare con coefficienti costanti delle soluzioni (27) è nuovamente una soluzione di questo sistema. Per questa ragione

$$q = \sum_{j=1}^{n} C_j u_j \operatorname{sen}(\omega_j t + \alpha_j) \quad (\omega_j = \sqrt{\lambda_j};\ j = 1, \ldots, n) \tag{30}$$

con costanti arbitrarie C_j, α_j $(j = 1, \ldots, n)$ è una soluzione del sistema (9) o (16). Mostreremo che *la formula* (30) *comprende tutti i moti del sistema.*

Innanzitutto dimostriamo che gli n vettori ampiezza u_j $(j = 1, \ldots, n)$ sono linearmente indipendenti [1]. Infatti, sia

$$\sum_{j=1}^{n} c_j u_j = 0.$$

Allora per ogni k $(1 \leqslant k \leqslant n)$

$$0 = A\left(u_k, \sum_{j=1}^{n} c_j u_j\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j A(u_k, u_j). \tag{31}$$

Ma $A(u_k, u_j) = 0$ per $k \neq j$ e $A(u_k, u_j) > 0$ per $k = j$. Dunque, dalle uguaglianze (31) segue che

$$c_k = 0 \quad (k = 1, \ldots, n),$$

cioè non ci può essere nessuna relazione lineare tra i vettori $u_1, \ldots, u_n$.

Ora nella formula (30) scegliamo i valori delle costanti arbitrarie C_j, α_j in modo tale che siano valide le seguenti condizioni iniziali arbitrarie preassegnate:

$$q_i(0) = q_{i0}, \quad \dot{q}_i(0) = \dot{q}_{i0} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{32}$$

[1] Questo è stato dimostrato nel § 37 nel caso particolare quando A è una matrice unitaria.

o in notazione matriciale

$$q(0) = q_0, \qquad \dot{q}(0) = \dot{q}_0. \tag{33}$$

Dalla formula (30) otteniamo

$$\begin{cases} q_0 = \sum_{j=1}^{n} C_j \operatorname{sen} \alpha_j u_j, \\ \dot{q}_0 = \sum_{j=1}^{n} \omega_j C_j \cos \alpha_j u_j. \end{cases} \tag{34}$$

Per l'indipendenza lineare dei vettori u_j ($j = 1, \ldots, n$) determiniamo univocamente da ciò i prodotti $C_j \operatorname{sen} \alpha_j$ e $\omega_j C_j \cos \alpha_j$ e, conseguentemente, poiché $\omega_j \neq 0$, determiniamo univocamente da questo fatto i valori delle costanti arbitrarie C_j e α_j ($j = 1, \ldots, n$) [1].

Così, in assenza di radici multiple nell'equazione secolare, la formula (30) comprende tutte le oscillazioni del sistema [2].

Ora se l'equazione delle frequenze ha radici multiple allora si può asserire che ci saranno alla fine m soluzioni della forma $u \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$, dove m è il numero delle radici distinte λ_j dell'equazione secolare.

Lagrange credette che nel caso di frequenze multiple la soluzione generale del sistema (9) non fosse più rappresentabile nella forma (30) e che nel membro destro della (30) apparissero i cosiddetti termini secolari della forma

$$(u + u't + u''t^2 + \ldots) \operatorname{sen}(\omega t + \alpha).$$

Però, Lagrange era in errore. Come dimostrò Weierstrass più tardi, ad ogni radice λ di molteplicità p corrispondono esattamente p soluzioni linearmente indipendenti del sistema di equazioni lineari (12), cioè per ogni soluzione λ_j di molteplicità p, è possibile trovare p vettori ampiezza linearmente indipendenti. Così, anche nel caso di frequenze multiple, esistono n vettori ampiezza linearmente indipendenti, e la formula (30), che è composta con il loro aiuto, dà una soluzione generale in questo caso.

Le oscillazioni

$$q = C_j u_j \operatorname{sen}(\omega_j t + \alpha_j) \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{35}$$

che creano un'oscillazione arbitraria di un sistema, sono dette *oscillazioni principali* del sistema.

---

[1] Gli α_j sono determinati a meno di una costante additiva multipla di 2π.

[2] Le seguenti relazioni valgono per i vettori ampiezza u_j:

$$A(u_j, u_h) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_{ij} u_{kh} = 0 \quad (j \neq h;\ j,\ h = 1, \ldots, n).$$

Una derivazione rigorosa della formula (30) per il caso generale (cioè per frequenze multiple) con l'aiuto delle cosiddette coordinate « normali » sarà data nel prossimo paragrafo. In questa derivazione il caso delle radici multiple dell'equazione secolare non è specificatamente evidenziato.

Esempio. *Pendoli accoppiati.* I punti di sospensione di due pendoli semplici identici, ciascuno di massa m e lunghezza l, sono localizzati in una retta orizzontale. Due punti di questi pendoli, alla distanza h dai punti di sospensione ($0 < h \leqslant l$), sono collegati da una molla con rigidità γ; la

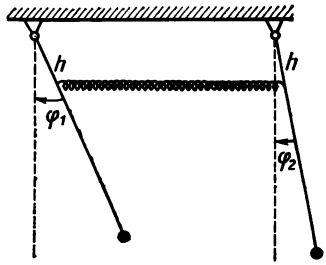


Fig. 49

molla è rilassata quando i pendoli occupano la posizione verticale. Si richiede di determinare l'oscillazione del sistema nel piano verticale.

Come coordinate indipendenti consideriamo gli angoli φ_1 e φ_2 formati dai pendoli con la verticale (fig. 49). Nella posizione di equilibrio $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Per infinitesimi di ordine superiore, l'estensione della molla è uguale a $h\,|\operatorname{sen}\varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_1| \approx h\,|\varphi_2 - \varphi_1|$. Dunque, nel caso dato

$$T = \frac{1}{2}\, ml^2\,(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2),$$

$$\Pi = mgl\,(1-\cos\varphi_1) + mgl\,(1-\cos\varphi_2) + \frac{\gamma h^2\,(\varphi_2-\varphi_1)^2}{2} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2}\, mgl\,(\varphi_1^2+\varphi_2^2) + \frac{1}{2}\,\gamma h^2\,(\varphi_2-\varphi_1)^2 + \ldots$$

Considerando in Π solo i termini quadratici, finalmente troviamo

$$T = \frac{1}{2}\, a\,(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2),$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\, c\,(\varphi_1^2+\varphi_2^2) - b\varphi_1\varphi_2,$$

dove

$$a = ml^2, \quad c = mgl + \gamma h^2, \quad b = \gamma h^2.$$

Scriviamo l'equazione delle frequenze

$$\begin{vmatrix} c-\lambda a & -b \\ -b & c-\lambda a \end{vmatrix} = 0 \qquad (\lambda = \omega^2)$$

e una delle due equazioni che determinano le ampiezze nelle oscillazioni principali (queste due equazioni sono dipendenti):

$$(c-\lambda a)\,u_1-bu_2=0, \quad \text{cioè} \quad \frac{u_1}{u_2}=\frac{b}{c-\lambda a}.$$

Dall'equazione delle frequenze, otteniamo

$$\omega_1^2=\lambda_1=\frac{c-b}{a}=\frac{g}{l}, \quad \omega_2^2=\lambda_2=\frac{c+b}{a}=\frac{g}{l}+2\frac{\gamma}{m}\frac{h^2}{l^2}.$$

Ne consegue che per la prima oscillazione principale $u_1 = u_2 = C_1$ e

$\varphi_1 = C_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t + \alpha_1)$, $\varphi_2 = C_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t + \alpha_1)$ $(\varphi_1 = \varphi_2)$,

e per la seconda $u_1 = -u_2 = C_2$ e

$\varphi_1 = C_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \alpha_2)$, $\varphi_2 = -C_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \alpha_2)$ $(\varphi_1 = -\varphi_2)$.

Nella prima oscillazione principale entrambi i pendoli hanno la stessa fase, la molla è rilassata e i pendoli non esercitano nessun effetto uno sull'altro. Nella seconda oscillazione principale i pendoli hanno fase opposta.

Un'oscillazione arbitraria è ottenuta dalla sovrapposizione delle due oscillazioni principali:

$$\varphi_1 = C_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \alpha_2),$$
$$\varphi_2 = C_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t + \alpha_1) - C_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \alpha_2).$$

§ 41. *Coordinate normali*

Le due forme quadratiche

$$A(q, q)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}q_iq_k \quad \text{e} \quad C(q, q)=\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}q_iq_k \qquad (1)$$

fra cui almeno una, per esempio $A(q, q)$, è definita positiva, per mezzo di una stessa trasformazione (non singolare) delle variabili

$$q_i=\sum_{j=1}^{n} u_{ij}\theta_j \quad (i=1, \ldots, n;\ \det(u_{ij})_{i,j=1}^{n} \neq 0) \qquad (2)$$

possono essere sempre ridotte alla « somma di quadrati » [1]

$$A(q, q)=\sum_{j=1}^{n}\theta_j^2, \quad C(q, q)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\theta_j^2. \qquad (3)$$

Qui tutte le $\lambda_j > 0$, poiché (vedi § 40) anche la forma $C(q, q)$ è definita positiva.

Poiché le velocità generalizzate $\dot{q}_i$ e $\dot{\theta}_j$ sono legate dalle stesse relazioni che legano q_i e θ_j,

$$\dot{q}_i=\sum_{j=1}^{n} u_{ij}\dot{\theta}_j \quad (i=1, \ldots, n),$$

[1] Vedi, per esempio, il libro *Teoria delle matrici*, citato a pag. 199, cap. X, § 6.

segue che nella prima delle equazioni (3) possiamo sostituire le q_i e le θ_j con le $\dot{q}_i$ e le $\dot{\theta}_j$, dopo di che otteniamo le seguenti espressioni dell'energia cinetica e dell'energia potenziale:

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \dot{\theta}_j^2, \\ \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,\,k=1}^{n} c_{ik}q_iq_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\theta_j^2. \end{cases} \tag{4}$$

Le variabili $\theta_1, \ldots, \theta_n$ sono dette coordinate *normali* o *principali*. Le formule (2) della trasformazione dalle coordinate arbitrarie a quelle normali possono essere date nella notazione « vettoriale » come segue:

$$\boldsymbol{q} = \sum_{j=1}^{n} \theta_j \boldsymbol{u}_j, \tag{5}$$

dove

$$\boldsymbol{q} = \begin{Vmatrix} q_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{Vmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_j = \begin{Vmatrix} u_{1j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{nj} \end{Vmatrix} \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Poiché la trasformazione delle coordinate (2) è non singolare il corrispondente determinante non è nullo:

$$\det (u_{ij})_{i,\,j=1}^{n} \neq 0,$$

cioè i vettori $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ sono linearmente indipendenti.

Utilizzando le espressioni semplici (4) di T e Π nelle coordinate normali, formiamo le equazioni di Lagrange in queste coordinate:

$$\ddot{\theta}_j + \lambda_j\theta_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

Ognuna di queste equazioni contiene una sola funzione incognita. Le soluzioni generali delle equazioni (6) sono conosciute per determinare le oscillazioni armoniche:

$$\theta_j = C_j \operatorname{sen} (\omega_j t + \alpha_j) \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{7}$$

dove C_j e α_j sono costanti arbitrarie ($j = 1, \ldots, n$). Sostituendo queste espressioni nella formula (5), otteniamo una formula generale per le oscillazioni:

$$\boldsymbol{q} = \sum_{j=1}^{n} C_j \boldsymbol{u}_j \operatorname{sen} (\omega_j t + \alpha_j). \tag{8}$$

Si è dunque stabilito rigorosamente che questa formula comprende tutte le piccole oscillazioni di un sistema conservativo nel caso più generale [1].

Assumendo, nella formula (8), che tutte le costanti arbitrarie, eccetto C_j e α_j, siano nulle, otteniamo la j-esima oscillazione armonica « principale »

$$q = C_j u_j \operatorname{sen}(\omega_j t + \alpha_j). \tag{9}$$

(Nelle coordinate normali questa oscillazione si ottiene quando tutte le $\theta_i = 0$ per $i \neq j$, e cambia solo la coordinata θ_j.) Nel paragrafo precedente è stato stabilito che il quadrato della frequenza $\lambda_j = \omega_j^2$ soddisfa l'equazione delle frequenze. Poiché per q non esiste nessuna oscillazione armonica del tipo (9), diversa da quelle che compaiono come addendi nella formula generale (8), segue che le $\lambda_j = \omega_j^2$ ($j = 1, \ldots, n$) sono *tutte* radici dell'equazione secolare. Inoltre, se qualche radice è ripetuta p volte, allora ad essa corrispondono p vettori ampiezza u_j linearmente indipendenti determinati dal sistema di equazioni lineari (28) o (29) del paragrafo precedente.

Abbiamo così nuovamente dimostrato che tutte le radici λ_j dell'equazione secolare sono reali e positive ed abbiamo stabilito che alle n frequenze $\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$ corrispondono n vettori ampiezza u_j ($j = 1, \ldots, n$) linearmente indipendenti.

Sostituendo nella formula di $A(q, q)$ l'espressione (5) per q al posto di q stesso, otteniamo

$$A(q, q) = A\Big(\sum_{j=1}^{n} \theta_j u_j, \quad \sum_{h=1}^{n} \theta_h u_h\Big) = \sum_{j,h=1}^{n} A(u_j, u_h)\,\theta_j \theta_h. \tag{10}$$

In altre parole,

$$A(q, q) = \sum_{j=1}^{n} \theta_j^2. \tag{11}$$

Paragonando la (10) con la (11), otteniamo le seguenti relazioni [2] per i vettori ampiezza u_j ($j = 1, \ldots, n$), con l'aiuto dei quali, usando la formula (5), avviene il passaggio alle coordinate normali:

$$A(u_i, u_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases} \qquad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{12}$$

---

[1] Nel paragrafo precedente, questa formula è stata stabilita solo per il caso in cui l'equazione secolare non abbia radici multiple.

[2] In altre parole, i vettori u_j ($j = 1, \ldots, n$) sono ortonormali nella metrica A (vedi nota, pag. 208)

§ 42. *Effetto delle forze periodiche esterne sulle oscillazioni di un sistema conservativo*

Oltre alle forze potenziali $-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$, su un sistema agiscono altre forze $Q_i = Q_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Passiamo alle coordinate normali usando le formule

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}\theta_j \qquad (i = 1, \ldots, n;\ \det (u_{ij})_{i,\,j=1}^{n} \neq 0). \tag{1}$$

Alle forze Q_i nelle coordinate q_i $(i = 1, \ldots, n)$ corrispondono le forze Θ_j nelle coordinate θ_j $(j = 1, \ldots, n)$. Procedendo dal fatto che le espressioni del lavoro elementare delle forze sono uguali, stabiliamo una relazione tra Q_i e Θ_j:

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = \sum_{j=1}^{n} \Theta_j \delta\theta_j. \tag{2}$$

Osservando che, in virtù delle formule (1),

$$\delta q_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}\delta\theta_j \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

e sostituendo queste espressioni di δq_i nella (2) otteniamo

$$\sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} u_{ij}Q_j\Big)\,\delta\theta_i = \sum_{j=1}^{n} \Theta_j \delta\theta_j. \tag{4}$$

Dunque, uguagliando i coefficienti degli incrementi indipendenti delle coordinate normali $\delta\theta_j$, otteniamo

$$\Theta_j = \sum_{i=1}^{n} u_{ij}Q_i \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{5}$$

Così, se le « vecchie » coordinate q_i sono espresse in funzione delle « nuove » θ_j per mezzo della matrice $\boldsymbol{U} = \| u_{ij} \|$,

$$\begin{aligned} q_1 &= u_{11}\theta_1 + u_{12}\theta_2 + \ldots + u_{1n}\theta_n, \\ q_2 &= u_{21}\theta_1 + u_{22}\theta_2 + \ldots + u_{2n}\theta_n, \qquad (\boldsymbol{q} = \boldsymbol{U}\theta,\ \det \boldsymbol{U} \neq 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_n &= n_{n1}\theta_1 + u_{n2}\theta_2 + \ldots + u_{nn}\theta_n \end{aligned} \tag{6}$$

allora le « nuove » forze generalizzate Θ_j sono espresse in funzione delle « vecchie » forze generalizzate Q_i per mezzo della matrice trasposta $\boldsymbol{U}'$:

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= u_{11}Q_1 + u_{21}Q_2 + \ldots + u_{n1}Q_n, \\ \Theta_2 &= u_{12}Q_1 + u_{22}Q_2 + \ldots + u_{n2}Q_n, \qquad (\Theta = \boldsymbol{U}'\boldsymbol{Q}). \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Theta_n &= u_{1n}Q_1 + u_{2n}Q_2 + \ldots + u_{nn}Q_n \end{aligned} \tag{7}$$

Paragonando le formule matriciali $q = U\theta$ e $Q = (U')^{-1}\Theta$, vediamo che nel passaggio dalle coordinate alle forze la matrice della trasformazione U è sostituita [1] dalla matrice $(U')^{-1}$.

Questo è espresso in parole come segue: *le forze generalizzate sono trasformate in modo controvariante rispetto alle coordinate* [2].

Dopo aver imparato come determinare le Θ_j dalle Q_i date, scriviamo le equazioni di Lagrange in funzione delle coordinate normali, usando per T e Π le espressioni (4) del paragrafo precedente:

$$\ddot{\theta}_j + \omega_j^2 \theta_j = \Theta_j(t) \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{8}$$

Si denoti con θ_j^* $(j = 1, \ldots, n)$ una soluzione particolare arbitraria dell'equazione (8). Allora la soluzione generale della (8) sarà

$$\theta_j = C_j \operatorname{sen}(\omega_j t + \alpha_j) + \theta_j^* \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Sia $\Theta_j(t)$ la forza periodica e sia questa forza sinusoidale con frequenza Ω:

$$\Theta_j(t) = A_j \operatorname{sen} \Omega t. \tag{10}$$

Allora si può rapidamente vedere che per le variabili θ_j^* vale la relazione

$$\theta_j^* = \frac{A_j}{\omega_j^2 - \Omega^2} \operatorname{sen} \Omega t. \tag{11}$$

Se $Q_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$, e quindi anche $\Theta_j(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$ sono forze periodiche arbitrarie con periodo τ e frequenza $\Omega = \frac{2\pi}{\tau}$, segue che $\Theta_j(t)$ può essere sviluppata in serie di Fourier:

$$\Theta_j(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{jm} \operatorname{sen}(m\Omega t + \varphi_{jm}) \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{12}$$

Allora, in virtù della linearità dell'equazione (8),

$$\theta_j^* = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_{jm}}{\omega_j^2 - m^2\Omega^2} \operatorname{sen}(m\Omega t + \varphi_{jm}) \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{13}$$

Se qualche $m\Omega$ coincide con ω_j, e le corrispondenti $A_{jm} \neq 0$, allora per le coordinate θ_j abbiamo il fenomeno di *risonanza*.

Sostituendo le espressioni (9) per θ_j nella formula

$$q = \sum_{j=1}^{n} \theta_j u_j,$$

[1] Se $U = \| u_{ij} \|_1^n$ è una matrice ortogonale, allora $(U')^{-1} = U$, e le forze si trasformano esattamente come le coordinate.

[2] Nel caso generale, quando la trasformazione delle coordinate non è lineare, le forze generalizzate sono trasformate in modo controvariante rispetto ai differenziali delle coordinate.

otteniamo

$$q = \widehat{q} + q^*, \tag{14}$$

dove le

$$\widehat{q} = \sum_{j=1}^{n} C_j u_j \operatorname{sen}(\omega_j t + \alpha_j) \tag{15}$$

sono le *oscillazioni libere* e le

$$q^* = \sum_{j=1}^{n} \theta_j^* u_j$$

sono le *oscillazioni forzate* del sistema, e u_j è il vettore ampiezza di coordinate $u_{1j}, u_{2j}, \ldots, u_{nj}$ $(j = 1, \ldots, n)$.

§ 43. *Proprietà estremali delle frequenze di un sistema conservativo. Teorema di Rayleigh sulla variazione delle frequenze con la variazione dell'inerzia e della rigidità del sistema. Sovrapposizione dei vincoli*

Nel § 41 abbiamo considerato la trasformazione lineare e non singolare delle coordinate

$$q = \sum_{j=1}^{n} \theta_j u_j \tag{1}$$

o, in notazione scalare,

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}\theta_j \quad (i = 1, \ldots, n;\ \det(u_{ij})_{i,j=1}^{n} \neq 0) \tag{1'}$$

che realizza il passaggio alle coordinate normali $\theta_1, \ldots, \theta_n$ in cui le forme quadratiche [1]

$$A(q, q) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} q_i q_k, \quad C(q, q) = \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} q_i q_k \tag{2}$$

hanno forma semplice (« canonica »):

$$A(q, q) = \sum_{j=1}^{n} \theta_j^2, \quad C(q, q) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j^2 \theta_j^2. \tag{3}$$

D'ora in poi assumeremo che le oscillazioni principali siano numerate in modo tale che le loro frequenze procedano nel seguente ordine crescente:

$$\omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \ldots \leqslant \omega_n. \tag{4}$$

Consideriamo il rapporto tra le forme quadratiche (3)

$$\frac{C(q, q)}{A(q, q)} = \frac{\omega_1^2\theta_1^2 + \omega_2^2\theta_2^2 + \ldots + \omega_n^2\theta_n^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_n^2} \tag{5}$$

[1] $C(q, q)$ è il doppio dell'energia potenziale, e $A(q, q)$ si ottiene dall'espressione del doppio dell'energia cinetica $A(\dot{q}, \dot{q})$ sostituendo $\dot{q}$ con q.

per ogni $q \neq 0$ o, il che è lo stesso, per tutti i valori $\theta_1, \ldots, \theta_n$ che non siano contemporaneamente nulli. Sostituendo tutte le ω_j^2 al numeratore della (5) con un numero minore o uguale a ω_1^2, abbiamo

$$\frac{C(q, q)}{A(q, q)} \geqslant \omega_1^2. \tag{6}$$

In altri termini, dalla (5) è immediatamente ovvio che per $\theta_2 = \ldots = \theta_n = 0$ il rapporto $\frac{C(q, q)}{A(q, q)}$ assume il valore ω_1^2. Dunque, [1]

$$\omega_1^2 = \min \frac{C(q, q)}{A(q, q)}. \tag{7}$$

Ora sia imposto al sistema un vincolo [2] lineare omogeneo

$$l_1 q_1 + l_2 q_2 + \ldots + l_n q_n = 0 \quad \left(\sum_{i=1}^{n} l_i^2 > 0\right). \tag{8}$$

Esprimendo $q_1, q_2, \ldots, q_n$ in funzione delle coordinate normali per mezzo della trasformazione (1), abbiamo di nuovo, in coordinate normali, un vincolo lineare omogeneo:

$$l_1' \theta_1 + l_2' \theta_2 + \ldots + l_n' \theta_n = 0 \quad \left(\sum_{j=1}^{n} l_j'^2 > 0\right). \tag{8'}$$

Abbreviamo la notazione del vincolo (8) e (8') con

$$L = 0.$$

È sempre possibile trovare i valori θ_1 e θ_2 tali che insieme a $\theta_3 = \ldots = \theta_n = 0$ soddisfino l'equazione vincolare (8'). In accordo con la formula (5), per i corrispondenti q,

$$\frac{C(q, q)}{A(q, q)} = \frac{\omega_1^2 \theta_1^2 + \omega_2^2 \theta_2^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2} \leqslant \omega_2^2.$$

---

[1] Se su un asse di numeri reali disegnamo i punti $\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots, \omega_n^2$ e in questi punti concentriamo le masse $m_1 = \theta_1^2$, $m_2 = \theta_2^2, \ldots, m_n = \theta_n^2$, allora dalla (5) la quantità $\frac{C(q, q)}{A(q, q)}$ sarà la coordinata del centro di queste masse. Dunque, seguono immediatamente le relazioni (6) e (7), poiché il centro di massa è sempre localizzato tra le masse estreme e coincide con una delle masse estreme, se tutte le altre masse sono nulle.

[2] Se è dato un vincolo non lineare e se la posizione di equilibrio soddisfa l'equazione del vincolo, allora non c'è nessun termine assoluto nello sviluppo in serie di potenze del membro sinistro dell'equazione vincolare:

$$l_1 q_1 + l_2 q_2 + \ldots + l_n q_n + \sum_{i,k=1}^{n} l_{ik} q_i q_k + \ldots = 0.$$

Inoltre, assumiamo che ci siano termini lineari, cioè $\sum_{i=1}^{n} l_i^2 > 0$. Allora, eliminando i termini del secondo e maggior ordine, rappresentiamo l'equazione vincolare come (8).

Perciò, anche [1]

$$\min_{L=0} \frac{C(q, q)}{A(q, q)} \leqslant \omega_2^2. \tag{9}$$

Variamo ora il vincolo $L = 0$. Allora, il membro sinistro della disuguaglianza (9) varia, restando però minore o uguale a ω_2^2. Ma per il vincolo $\theta_1 = 0$ (in tal caso $l_1' = 1$, $l_2' = \ldots = l_n' = 0$) il rapporto $\frac{C(q, q)}{A(q, q)}$ è dato dalla formula

$$\frac{C(q, q)}{A(q, q)} = \frac{\omega_2^2\theta_2^2 + \ldots + \omega_n^2\theta_n^2}{\theta_2^2 + \ldots + \theta_n^2}$$

e per questa ragione (per analogia con le formule (5) e (7))

$$\min_{\theta_1=0} \frac{C(q, q)}{A(q, q)} = \omega_2^2.$$

Così, di tutti i vincoli della forma $L = 0$ la quantità

$$\min_{L=0} \frac{C(q, q)}{A(q, q)}$$

assume il suo valore maggiore ω_2^2 per il vincolo $\theta_1 = 0$. Dunque,

$$\max \min_{L=0} \frac{C(q, q)}{A(q, q)} = \omega_2^2. \tag{10}$$

Al posto di un solo vincolo $L = 0$, è possibile imporre al sistema più vincoli $L_1 = 0, \ldots, L_{h-1} = 0$. Come è stato fatto nel caso particolare di un solo vincolo è possibile mostrare che

$$\omega_h^2 = \max \min_{\substack{L_1=0 \\ \ldots\ldots \\ L_{h-1}=0}} \frac{C(q, q)}{A(q, q)} \quad (h = 2, \ldots, n). \tag{11}$$

Le formule (7) e (11) esprimono le proprietà estremali delle frequenze di un sistema conservativo. Queste proprietà sono talvolta chiamate proprietà *massiminimali* [2].

Al posto delle formule (7) e (11) possiamo facilmente ottenere formule analoghe:

$$\omega_n^2 = \max \frac{C(q, q)}{A(q, q)}, \tag{7'}$$

$$\omega_{n-h}^2 = \min \max_{\substack{L_1=0 \\ \ldots\ldots \\ L_h=0}} \frac{C(q, q)}{A(q, q)} \quad (h = 1, \ldots, n-1). \tag{11'}$$

[1] Il simbolo a sinistra della disuguaglianza (9) denota il minimo del rapporto $\frac{C(q, q)}{A(q, q)}$, a condizione che siano considerati solo i vettori $q \neq 0$ che soddisfano l'equazione vincolare (8).

[2] Le proprietà estremali di frequenze furono stabilite dai matematici tedeschi E. Fischer, « Monatshefte für Math. und Phys. », 16 (1905), 234-249; R. Kurant, « Zeitschrift für angew. Math. und Mech. », 2 (1922), 278-285.

Le proprietà estremali delle frèquenze principali espresse dalla (7′) e dalla (11′) sono chiamate qualche volta proprietà *minimassimali*. In aggiunta al sistema dato, consideriamo anche un altro sistema conservativo con energie cinetica e potenziale

$$\frac{1}{2}\widetilde{A}(\dot{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} \widetilde{a}_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k, \qquad \frac{1}{2}\widetilde{C}(q, q) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} \widetilde{c}_{ik}q_iq_k \quad (12)$$

e con frequenze principali

$$\widetilde{\omega}_1 \leqslant \widetilde{\omega}_2 \leqslant \ldots \leqslant \widetilde{\omega}_n. \quad (13)$$

Per questo sistema

$$\widetilde{\omega}_1^2 = \min \frac{\widetilde{C}(q, q)}{\widetilde{A}(q, q)}, \quad (14)$$

$$\widetilde{\omega}_h^2 = \max \min_{\substack{L_1=0 \\ \ldots \\ L_{h-1}=0}} \frac{\widetilde{C}(q, q)}{\widetilde{A}(q, q)} \quad (h = 2, \ldots, n). \quad (15)$$

Il nuovo sistema abbia, per la stessa inerzia, una rigidità maggiore, cioè per ogni q

$$\widetilde{A}(q, q) = A(q, q), \quad \widetilde{C}(q, q) \geqslant C(q, q)$$

oppure *inerzia minore, per la stessa rigidità*,

$$\widetilde{A}(q, q) \leqslant A(q, q), \quad \widetilde{C}(q, q) = C(q, q).$$

In entrambi i casi, per ogni $q \neq 0$,

$$\frac{C(q, q)}{A(q, q)} \leqslant \frac{\widetilde{C}(q, q)}{\widetilde{A}(q, q)}. \quad (16)$$

Ma allora sia i minimi che i massimi di questi rapporti saranno legati dalle stesse relazioni, cioè dalla disuguaglianza (16), in virtù delle formule (7), (11), (14) e (15), segue che

$$\omega_j \leqslant \widetilde{\omega}_j \quad (j = 1, \ldots, n). \quad (17)$$

Qui, almeno una di queste relazioni ha segno $<$, in tal modo che l'identità [1]

$$\frac{C(q, q)}{A(q, q)} = \frac{\widetilde{C}(q, q)}{\widetilde{A}(q, q)} \quad (18)$$

non sia mai vera.

Siamo dunque giunti al teorema di Rayleigh [2]:

[1] Infatti, in accordo con la (5), l'identità (18) vale nel caso in cui $\omega_j = \widetilde{\omega}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$.

[2] Questo teorema fu stabilito dal fisico inglese Rayleigh nel 1873 (J. W. Rayleigh, *The theory of sound*, II edizione Macmillan, Londra, 1894).

Le frequenze principali crescono quando la rigidità del sistema è crescente, oppure quando l'inerzia del sistema è decrescente [1].

Troviamo come l'imposizione dei vincoli influenzi le grandezze delle frequenze principali $\omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \ldots \leqslant \omega_n$ di un sistema conservativo.

Imponiamo ad un sistema s vincoli linearmente indipendenti

$$\widehat{L}_1 = 0, \ \widehat{L}_2 = 0, \ \ldots, \ \widehat{L}_s = 0.$$

Il sistema conservativo così ottenuto con $n - s$ gradi di libertà abbia come frequenze principali $\omega_1^* \leqslant \omega_2^* \leqslant \ldots \leqslant \omega_{n-s}^*$. Dunque,

$$\omega_1^{*2} = \min_{\substack{\widehat{L}_1=0 \\ \ldots \\ \widehat{L}_s=0}} \frac{C(q, q)}{A(q, q)}. \tag{19}$$

Paragonando la formula (19) con la (7) e la (11) (quando $h - 1 = s$), otteniamo

$$\omega_1 \leqslant \omega_1^* \leqslant \omega_{s+1} \tag{20}$$

Esattamente nello stesso modo, per ogni $h \leqslant n - s$

$$\omega_h^{*2} = \max_{\substack{L_1=0, \ \ldots, \ L_{h-1}=0}} \min_{\widehat{L}_1=0, \ \ldots, \ \widehat{L}_s=0} \frac{C(q, q)}{A(q, q)}. \tag{21}$$

Qui i vincoli $\widehat{L}_1 = 0, \ \ldots, \ \widehat{L}_s = 0$ sono fissati, mentre i vincoli $L_1 = 0, \ \ldots, \ L_{h-1} = 0$ variano. Confrontando la (21) con la (11) e con la formula

$$\omega_{h+s}^2 = \max_{\substack{L_1=0 \\ \ldots \\ L_{h+s-1}=0}} \min \frac{C(q, q)}{A(q, q)},$$

in cui tutti gli $s + h - 1$ vincoli variano, avremo

$$\omega_h \leqslant \omega_h^* \leqslant \omega_{h+s} \quad (h = 1, \ \ldots, \ n - s). \tag{22}$$

Le formule (22) *mostrano che nell'imposizione degli s vincoli indipendenti, ognuna delle prime n — s frequenze principali cresce senza superare però la vecchia frequenza, il cui numero è maggiore di s unità del numero della frequenza data.*

1. Come applicazione di questa proposizione, può essere mostrato che le radici $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ dell'equazione secolare $\Delta(\lambda) \equiv \det (c_{ik} - \lambda a_{ik})_{i, \ k=1}^{n} = 0$ sono separate dalle radici

---

[1] Di quanto crescono le oscillazioni principali può essere valutato nel primo caso dalla differenza $\widetilde{C}(q, q) - C(q, q)$, e nel secondo caso dalla differenza $\widetilde{A}(q, q) - A(q, q)$ (vedi F.R. Gantmacher e M. G. Krejn, *Matrici oscillatorie e nuclei, e piccole oscillazioni dei sistemi meccanici*, II ed., 1950, cap. 3, § 10; ed. russa).

$\lambda_1^* \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-1}^*$ dell'equazione

$$\Delta_1(\lambda) \equiv \det(c_{ik} - \lambda a_{ik})_{i,k=1}^{n-1} = 0\,^1,$$

cioè

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_1^* \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_2^* \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-1}^* \leqslant \lambda_n. \tag{23}$$

Infatti, l'equazione $\Delta_1(\lambda) = 0$ è un'equazione secolare di un sistema conservativo ottenuto da quello iniziale per l'imposizione di un solo vincolo $q_n = 0$. Dunque, ponendo $\lambda_k = \omega_k^2$ $(k = 1, \ldots, n)$, $\lambda_j^* = \omega_j^{*2}$ $(j = 1, \ldots, n-1)$, otteniamo subito le disuguaglianze (23) dalle disuguaglianze (22) per $s = 1$.

2. Indichiamo anche un'altra applicazione notevole della proposizione sulla variazione delle frequenze all'imposizione dei vincoli. Le screpolature di un bicchiere sappiamo che possono essere rivelate picchiettando con le dita su di esso. La ragione sta nel fatto che un bicchiere senza screpolature ha vincoli supplementari (rispetto ad un bicchiere con screpolature) tra le sue parti. Ciò spiega il fatto che in un bicchiere senza screpolature le oscillazioni sono più alte.

§ 44. *Piccole oscillazioni dei sistemi elastici*

Come esempio importante di piccole oscillazioni di un sistema conservativo, consideriamo n masse $m_1, m_2, \ldots, m_n$ concentrate negli n punti (1), (2), ..., (n) di un sistema elastico S (una corda, una sbarra, una membrana, una lastra e simili) che ha dimensioni finite ed ha in qualche modo gli estremi fissati.

Assumeremo che gli spostamenti (deflessioni) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dei punti (1), (2), ..., (n) del sistema S e le forze $F_1, F_2, \ldots$ $\ldots, F_n$ agenti sulle masse $m_1, m_2, \ldots, m_n$ siano parallele ad una stessa direzione e per questa ragione siano determinate dalle loro grandezze algebriche (fig. 50). Le deflessioni $y_1, y_2, \ldots, y_n$ possono essere considerate come coordinate indipendenti del sistema, e le forze $F_1, F_2, \ldots, F_n$ come le corrispondenti forze generalizzate, poiché il lavoro elementare di queste forze è uguale a

$$\sum_{i=1}^{n} F_i\, dy_i.$$

Quando studiamo le oscillazioni libere, assumiamo per le forze $F_1, F_2, \ldots, F_n$ le forze elastiche $F_1^*, \ldots, F_n^*$ agenti sulle masse $m_1, m_2, \ldots, m_n$ del sistema elastico S, date le deflessioni y_1,

---

[1] $\Delta_1(\lambda)$ è il minore principale di ordine $(n-1)$ del determinante $\Delta(\lambda)$. Si dice qualche volta che le disuguaglianze (23) esprimono il « teorema della separazione » per le radici dell'equazione secolare. Le disuguaglianze (23) possono essere usate per trovare gli estremi superiore e inferiore delle radici dell'equazione secolare (vedi, per esempio, I.M. Babakov, *Teoria delle oscillazioni*, Gostekhizdat, 1958, pagg. 106-107; ed. russa).

$y_2, \ldots, y_n$. Il sistema di n particelle, qui considerato, sottoposto a forze elastiche è un sistema conservativo ed ha un'energia potenziale definita $\Pi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Sviluppando in serie di potenze la funzione $\Pi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ e considerando solo i termini quadratici (vedi § 40), otteniamo per Π l'espressione

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,\,k=1}^{n} c_{ik} y_i y_k \quad (c_{ik} = c_{ki},\ i,\ k = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Allora per le forze elastiche $F_i^* = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ troviamo

$$F_i^* = -\sum_{k=1}^{n} c_{ik} y_k \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Considerando la posizione di equilibrio $y_1 = \ldots = y_n = 0$ stabile, assumiamo che *la forma quadratica* (1), *che esprime l'ener-*

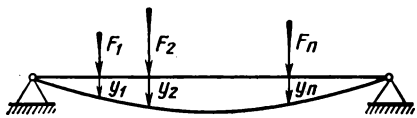


Fig. 50

gia potenziale come una funzione della deflessione, è definita positiva:

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} c_{ik} y_i y_k > 0 \quad \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 > 0\right). \tag{3}$$

L'energia cinetica del sistema ha una forma semplice:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{y}_i^2 . \tag{4}$$

Nella ricerca dell'oscillazione armonica $y_i = u_i \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$, giungiamo (come è stato fatto nel § 40) all'equazione delle frequenze

$$\begin{vmatrix} c_{11} - m_1\lambda & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - m_2\lambda & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} - m_n\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\lambda = \omega^2) \tag{5}$$

e alle equazioni algebriche per determinare le ampiezze

$$\sum_{k=1}^{n} (c_{ik} - \lambda m_i \delta_{ik})\, u_k = 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

Il sistema ha n frequenze

$$\omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \ldots \leqslant \omega_n \tag{7}$$

e le corrispondenti colonne delle ampiezze $u_1, u_2, \ldots, u_n$; le oscillazioni libere sono determinate dalla formula

$$y = \sum_{j=1}^{n} C_j u_j \operatorname{sen}(\omega_j t + \alpha_j), \tag{8}$$

dove C_j e α_j ($j = 1, \ldots, n$) sono costanti arbitrarie determinate dalle condizioni iniziali.

Supponiamo che le forze esterne $F_1, \ldots, F_n$ diano origine alle deflessioni statiche $y_1, \ldots, y_n$. Allora le forze F_i sono bilanciate dalle forze elastiche F_i^* ($F_i = -F_i^*$; $i = 1, \ldots, n$) e per questa ragione, in accordo con le equazioni (2),

$$F_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} y_k \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Un ruolo importante nello studio dei sistemi elastici è giocato dalla matrice $G = \| g_{ik} \|_1^n$, che è l'inversa [1] della matrice $C = \| c_{ik} \|_1^n$:

$$G = C^{-1}.$$

Usando la matrice G è possibile risolvere il sistema di relazioni (9) per le $y_1, \ldots, y_n$ e rappresentarlo nella forma

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} g_{ik} F_k \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{10}$$

La quantità g_{ik} è uguale alla deflessione nel punto (i) causata da una forza esterna unitaria applicata nel punto (k), ed è detta *coefficiente d'influenza* del punto (k) sul punto (i) ($i, k = 1, \ldots, n$). Dal fatto che la matrice C è simmetrica, segue che è simmetrica, anche la matrice inversa G composta da coefficienti d'influenza [2]

$$g_{ik} = g_{ki} \quad (i, k = 1, \ldots, n) \tag{11}$$

e dal fatto che la forma (3) è definita positiva segue che la forma quadratica

$$G(F, F) = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} F_i F_k > 0 \quad \left(\sum_{i=1}^{n} F_i^2 > 0 \right) \tag{12}$$

è definita positiva, poiché la forma quadratica $\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} y_i y_k$ si trasforma nella forma (12) nel caso di trasformazione delle va-

[1] La matrice C non è singolare (det $C \neq 0$) perché la forma quadratica (3) è definita positiva.

[2] L'equazione (11) esprime il cosiddetto *principio di reciprocità di Maxwell*: « una deflessione nel punto (i) dovuta ad una forza unitaria applicata nel punto (k) è uguale alla deflessione in (k) con una forza unitaria applicata al punto (i) ».

riabili (10):

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,\,k=1}^{n} c_{ik} y_i y_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} F_i y_i = \frac{1}{2} \sum_{i,\,k=1}^{n} g_{ik} F_i F_k. \qquad (13)$$

Consideriamo un sistema elastico *lineare* S (una corda o una sbarra con gli estremi fissati come al solito). È possibile mostrare che in questo caso la matrice dei coefficienti di influenza G possiede le seguenti proprietà:

1. Tutti i minori (e non solo quelli principali!) di qualunque ordine della matrice G sono non negativi

$$\begin{vmatrix} g_{i_1 k_1} & \dots & g_{i_1 k_p} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{i_p k_1} & \dots & g_{i_p k_p} \end{vmatrix} \geqslant 0$$

$$(0 \leqslant i_1 \leqslant \dots \leqslant i_p \leqslant n;\ 0 \leqslant k_1 \leqslant \dots \leqslant k_p \leqslant n;\ p = 1, \dots, n).$$

2. $g_{ik} > 0$ per $|\, i - k \,| \leqslant 1$ $(i, k = 1, \dots, n)$.

3. Il determinante $\det G = |\, g_{ik} \,|_1^n > 0$.

Le matrici che hanno le proprietà 1, 2 e 3 sono dette matrici *oscillatorie*.

Si osservi che per ogni matrice definita positiva G, sono valide la proprietà 3 e anche le disuguaglianze 1 per i minori principali e le disuguaglianze 2 per gli elementi diagonali g_{ii} $(i = 1, \dots, n)$. Ad ogni modo, la non negatività dei minori non principali di qualunque ordine p [1] e la positività degli elementi $g_{12}, \dots, g_{n-1,\,n}$ sono proprietà particolari della matrice dei coefficienti d'influenza di un sistema elastico lineare.

Dalla natura oscillatoria della matrice dei coefficienti d'influenza seguono le proprietà « oscillatorie » di base delle oscillazioni elastiche di un sistema lineare.

1. Tutte le frequenze sono distinte:

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n.$$

2. Tutte le ampiezze $u_{11}, u_{21}, \dots, u_{n1}$ nella prima oscillazione principale (con frequenza ω_1) sono diverse da zero e hanno lo stesso segno.

3. Tra le ampiezze $u_{1j}, u_{2j}, \dots, u_{nj}$ nella j-esima oscillazione principale (con frequenza ω_j) ci sono esattamente $j - 1$ cambiamenti di segno $(j = 1, 2, \dots, n)$ (fig. 51).

Uno studio delle matrici oscillatorie e la prova delle proprietà oscillatorie delle oscillazioni elastiche vanno oltre gli scopi di questo libro [2].

---

[1] In particolare, la non negatività degli elementi non diagonali della matrice G $(g_{ik} \geqslant 0$ per $i \neq k)$.

[2] Il lettore può trovare que stomateriale nel libro: F.R. Gantmacher e M.G. Krejn, *Matrici oscillatorie e nuclei, e piccole oscillazioni dei sistemi meccanici*, II edizione, Mosca, 1950 (ed. russa).

Esempio. Consideriamo il problema classico dell'oscillazione di una corda di lunghezza l con estremi fissati nel caso in cui l'intera massa della corda è concentrata in n punti equidistanti (uno dall'altro e dagli estremi),

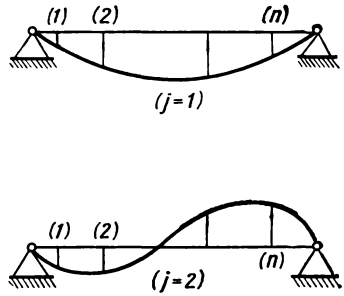


Fig. 51

dove tutte le masse concentrate sono uguali (e uguali ad m) (fig. 52).

L'allungamento dell'i-esimo segmento (compreso tra i punti con deflessioni y_i e y_{i+1}) sarà espresso (fino agli infinitesimi del quarto ordine) come

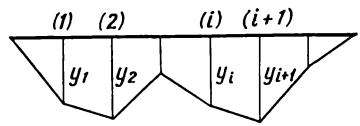


Fig. 52

segue:

$$\sqrt{\left(\frac{l}{n+1}\right)^2+(y_{i+1}-y_i)^2}-\frac{l}{n+1}=$$

$$=\frac{l}{n+1}\left(\sqrt{1+\left(\frac{n+1}{l}\right)^2(y_{i+1}-y_i)^2}-1\right)\approx\frac{n+1}{2l}(y_{i+1}-y_i)^2.$$

Assumendo che la tensione σ della corda sia costante [1], otteniamo un'espressione per l'energia potenziale

$$\Pi=\frac{c}{2}\sum_{i=0}^{n}(y_{i+1}-y_i)^2 \quad \left(y_0=y_{n+1}=0; \quad c=\frac{\sigma(n+1)}{l}\right). \tag{14}$$

L'energia cinetica è della forma semplice

$$T=\frac{m}{2}\sum_{i=1}^{n}\dot{y}_i^2. \tag{15}$$

Scegliamo una via indiretta, per trovare le frequenze principali ed i vettori ampiezza corrispondenti. Scriviamo le equazioni (6) per le ampiezze, facendo uso delle espressioni (14) e (15) per Π e T. Dividiamo ognuna delle

[1] Questa supposizione è giustificata solo per le piccole deflessioni $y_1, y_2, \ldots, y_n$ considerate.

equazioni (6) termine a termine per c e introduciamo la notazione abbreviata

$$1-\frac{m}{2c}\omega^2=\cos\theta, \tag{16}$$

dove θ è una quantità ausiliaria. Allora le equazioni (6) assumeranno, per le ampiezze, la seguente forma:

$$u_{k-1}-2u_k\cos\theta+u_{k+1}=0 \quad (k=1,\ \ldots,\ n), \tag{17}$$

dove

$$u_0=u_{n+1}=0. \tag{18}$$

Le equazioni algebriche (6) possono essere soddisfatte ponendo [1]

$$u_k=\operatorname{sen} k\theta \quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n+1). \tag{19}$$

Qui, la prima delle condizioni « agli estremi » (18) è automaticamente soddisfatta, e la seconda dà la condizione per determinare le frequenze desiderate:

$$\operatorname{sen}(n+1)\theta=0. \tag{20}$$

Dunque, $\theta_j=\frac{j\pi}{n+1}$ $(j=1,\ \ldots,\ n)$ e per la (16)

$$\omega_j^2=\frac{2c}{m}(1-\cos\theta_j),$$

cioè

$$\begin{cases}\omega_j=2\sqrt{\frac{c}{m}}\operatorname{sen}\frac{\theta_j}{2}=2\sqrt{\frac{c}{m}}\operatorname{sen}\frac{j\pi}{2(n+1)}\\ \left(j=1,\ \ldots,\ n;\ c=\frac{(n+1)\sigma}{l}\right).\end{cases} \tag{21}$$

Per determinare le ampiezze della j-esima oscillazione principale u_{1j}, u_{2j}, $\ldots$, u_{nj}, poniamo $\theta=\theta_j$ nell'equazione (19):

$$u_{kj}=\operatorname{sen} k\theta_j=\operatorname{sen}\frac{kj\pi}{n+1} \quad (k,\ j=1,\ \ldots,\ n). \tag{22}$$

Un'arbitraria oscillazione libera del sistema è determinata dalla formula

$$y_k=\sum_{j=1}^{n}C_j u_{kj}\operatorname{sen}(\omega_j t+\alpha_j)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}C_j\operatorname{sen}\frac{kj\pi}{n+1}\operatorname{sen}\left(2\operatorname{sen}\frac{j\pi}{2(n+1)}\cdot\sqrt{\frac{c}{m}}\,t+\alpha_j\right). \tag{23}$$

Dalle formule (21) e (22) è immediatamente evidente che le oscillazioni principali ottenute posseggono le proprietà oscillatorie 1-3.

Lagrange dimostrò come sia possibile, usando queste formule e un passaggio al limite, ottenere le oscillazioni libere di una corda omogenea (con estremi fissati), la cui massa non è più concentrata in n punti ma è distribuita uniformemente lungo la corda, che ha densità ρ.

---

[1] Sostituendo la (19) nella (17) otteniamo le identità trigonometriche

$$\operatorname{sen}(k-1)\theta-2\operatorname{sen} k\theta\cos\theta+\operatorname{sen}(k+1)\theta=0 \quad (k=1,\ \ldots,\ n).$$

Nel problema considerato poniamo $m = \frac{\rho l}{n}$, e allora troviamo l'analogia discreta di una corda omogenea con frequenze principali

$$\omega_j^{(n)} = \frac{2}{l}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}\, n\,(n+1)}\ \operatorname{sen}\frac{j\pi}{2(n+1)} \qquad (j=1,\ \ldots,\ n). \tag{24}$$

Nel limite per $n \to \infty$ otteniamo le seguenti espressioni familiari per le frequenze ω_j di una corda omogenea fissata:

$$\omega_j = j\,\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \qquad (j=1,\ \ldots,\ n). \tag{25}$$

Queste formule esprimono la legge di Mersenne in accordo alla quale *tutte le frequenze sono interi multipli della frequenza del tono principale* $\omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$ *ed ogni frequenza è direttamente proporzionale alla radice quadrata della tensione ed inversamente proporzionale alla lunghezza ed alla radice quadrata della densità.*

È data la j-esima oscillazione armonica di una corda omogenea nella forma

$$y_j(x,\ t) = u_j(x)\ \operatorname{sen}(\omega_j t + \alpha_j) \qquad (0 \leqslant x \leqslant l), \tag{26}$$

dove $u_j(x)$ è la deflessione dell'ampiezza in questa oscillazione.

Considerando che la deflessione dell'ampiezza $u_j(x)$ può essere ottenuta dalle quantità (22) per un passaggio al limite

$$u_j(x) = \lim u_{kj}$$

con n tendente ad infinito e $\frac{kl}{n+l} \to x$, otteniamo dalla (22)

$$u_j(x) = \operatorname{sen}\frac{j\pi x}{l} \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots).$$

Allora l'oscillazione libera di una corda omogenea, che è ottenuta dalla sovrapposizione lineare delle oscillazioni principali (26), è espressa dalla formula

$$y(x,\ t) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j\ \operatorname{sen}\frac{j\pi x}{l}\ \operatorname{sen}(\omega_j t + \alpha_j),$$

dove C_j e α_j $(j=1,\ 2,\ \ldots)$ sono costanti arbitrarie.

§ 45. *Piccole oscillazioni di un sistema scleronomo sotto l'azione di forze non esplicitamente dipendenti dal tempo*

Scriviamo le equazioni di Lagrange di un sistema scleronomo nel caso in cui le forze generalizzate Q_i dipendano solamente dalle coordinate e dalle velocità:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i(q_k,\ \dot{q}_k) \qquad (i=1,\ \ldots,\ n). \tag{1}$$

L'origine delle coordinate è una posizione di equilibrio. Allora (vedi § 40) l'energia cinetica, con infinitesimi fino al terzo ordine in q_i e $\dot{q}_i$ $(i = 1,\ \ldots,\ n)$, può essere rappresentata da una forma

quadratica con coefficienti costanti:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k, \tag{2}$$

dove $a_{ik}=a_{ki}$ $(i,\ k=1,\ \ldots,\ n)$.

Sviluppiamo ora in serie di potenze di q_k e $\dot{q}_k$ le forze generalizzate $Q_i\ (q_k,\ \dot{q}_k)$

$$Q_i=Q_{i0}+\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\right)_0 q_k+\left(\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_k}\right)_0 \dot{q}_k\right]+(**). \tag{3}$$

Poiché l'origine delle coordinate è una posizione di equilibrio, tutte le forze generalizzate, per coordinate e velocità nulle, debbono essere nulle, cioè

$$Q_{i0}=0 \quad (i=1,\ \ldots,\ n). \tag{4}$$

Introduciamo le seguenti notazioni:

$$b_{ik}=-\left(\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_k}\right)_0, \quad c_{ik}=-\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\right)_0 \quad (i,\ k=1,\ \ldots,\ n). \tag{5}$$

Allora, eliminando nello sviluppo (3) tutti i termini del secondo ordine e di ordini superiori, perché molto piccoli, avremo

$$Q_i=-\sum_{k=1}^{n}(b_{ik}\dot{q}_k+c_{ik}q_k) \quad (i=1,\ \ldots,\ n). \tag{6}$$

Sostituendo nelle equazioni di Lagrange (1) le espressioni (2) e (6) per l'energia cinetica e per le forze generalizzate, otteniamo le equazioni differenziali lineari del moto per piccole oscillazioni di un sistema scleronomo

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\ddot{q}_k+b_{ik}\dot{q}_k+c_{ik}q_k)=0 \quad (i=1,\ \ldots,\ n). \tag{7}$$

Denotiamo con $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ le matrici quadrate [1]

$$\boldsymbol{A}=\|a_{ik}\|_1^n, \quad \boldsymbol{B}=\|b_{ik}\|_1^n, \quad \boldsymbol{C}=\|c_{ik}\|_1^n$$

e con $\boldsymbol{q}$ la colonna composta da $q_1,\ \ldots,\ q_n$. Allora nella notazione matriciale, il sistema di equazioni differenziali (7) sarà visto come

$$\boldsymbol{A}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{q}=0. \tag{8}$$

Cercheremo la soluzione della (8) nella forma

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{u}e^{\mu t}, \tag{9}$$

dove $\boldsymbol{u}$ è una colonna con elementi costanti $u_1,\ \ldots,\ u_n$ e μ è un numero.

[1] Si osservi che $\boldsymbol{A}$ è una matrice simmetrica definita positiva (questo fatto non è qui utilizzato).

Sostituendo la (9) nell'equazione matriciale (8) e semplificando per $e^{\mu t}$, otteniamo

$$(A\mu^2 + B\mu + C)\, u = 0 \tag{10}$$

oppure, in forma sviluppata,

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\mu^2 + b_{ik}\mu + c_{ik})\, u_k = 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{10'}$$

Affinché il sistema (10) o (10') abbia una soluzione u non nulla, è necessario e sufficiente che il determinante del sistema sia uguale a zero:

$$\Delta(\mu) \equiv \det(A\mu^2 + B\mu + C) = 0 \tag{11}$$

o in forma estesa

$$\Delta(\mu) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}\mu^2 + b_{11}\mu + c_{11} & \ldots & a_{1n}\mu^2 + b_{1n}\mu + c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}\mu^2 + b_{n1}\mu + c_{n1} & \ldots & a_{nn}\mu^2 + b_{nn}\mu + c_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{11'}$$

L'equazione (11) è detta *equazione secolare* del sistema dato. Questa è un'equazione algebrica in μ di grado $2n$.

Ci limitiamo al caso basilare in cui tutte le radici dell'equazione secolare $\mu_1, \ldots, \mu_{2n}$ sono distinte. Ad ogni radice μ_h corrisponde una determinata soluzione non nulla $u_h \equiv (u_{1h}, \ldots, u_{nh})$ del sistema di equazioni omogenee algebriche (10) e, dunque, una soluzione particolare $u_h e^{\mu_h t}$ del sistema di equazioni differenziali (8) ($h = 1, \ldots, 2n$). La soluzione generale di questo sistema è ottenuta come la combinazione lineare (con coefficienti costanti arbitrari) di queste soluzioni particolari:

$$q = \sum_{h=1}^{2n} C_h u_h e^{\mu_h t}. \tag{12}$$

Di particolare importanza è il caso in cui tutte le parti reali delle radici μ_h sono negative:

$$\operatorname{Re} \mu_h < 0 \quad (h = 1, \ldots, 2n).$$

In questo caso, la posizione di equilibrio del sistema è asintoticamente stabile non solo per il sistema linearizzato (8), ma anche per il sistema scleronomo non lineare iniziale con equazioni differenziali (1) (vedi § 38).

In conclusione osserviamo che per un sistema conservativo $B = \| b_{ik} \|_1^n = 0$, mentre $A = \| a_{ik} \|_1^n$ e $C = \| c_{ik} \|_1^n$ sono matrici simmetriche definite positive. L'equazione secolare $\det(A\mu^2 + C) = 0$ si trasforma nell'equazione $\det(C - \lambda A) = 0$

dal § 40, se poniamo $\mu = i\sqrt{\lambda}$ ($i = \sqrt{-1}$). Ma, come mostrato nel § 40, l'equazione $\det(\boldsymbol{C} - \lambda \boldsymbol{A}) = 0$ ha solamente radici reali e positive. Dunque, nel caso di un sistema conservativo, l'equazione (11) ha solamente radici immaginarie.

§ 46. *Funzione dissipativa di Rayleigh. Effetto di piccole forze dissipative sulle oscillazioni di un sistema conservativo*

Consideriamo un importante caso particolare in cui la stabilità asintotica di una posizione di equilibrio è predeterminata e non c'è nessuna necessità di ricorrere al criterio di stabilità dato nel § 39.

Nelle espressioni per le forze generalizzate (vedi l'equazione (6) di pag. 229)

$$Q_i = -\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_k - \sum_{k=1}^{n} c_{ik}q_k \quad (i=1, \ldots, n) \tag{1}$$

le *matrici* $\boldsymbol{B} = \| b_{ik} \|_1^n$ e $\boldsymbol{C} = \| c_{ik} \|_1^n$, composte dai coefficienti, *siano simmetriche e definite positive.*

Allora, introducendo l'energia potenziale Π e la funzione dissipativa di Rayleigh R (vedi § 8) che sono date dalle forme quadratiche definite positive

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i,\,k=1}^{n} c_{ik}q_iq_k > 0, \quad R = \frac{1}{2}\sum_{i,\,k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k > 0$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n} q_i^2 > 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i^2 > 0\right) \tag{2}$$

possiamo riscrivere le formule (1) come

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \quad (i=1, \ldots, n). \tag{3}$$

Oltre alle forze potenziali $-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$ ($i = 1, \ldots, n$), il sistema è sottoposto alle forze dissipative $-\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}$ definite dalla funzione di Rayleigh. Nel § 8 è stato spiegato che in tal caso il sistema è definito dissipativo. Poiché, in accordo con la prima delle formule (2), l'energia potenziale in una posizione di equilibrio ha un minimo stretto e la posizione di equilibrio è isolata, segue che (vedi il teorema di pag. 178) la posizione di equilibrio di un sistema conservativo è asintoticamente stabile.

Dunque, le forze dissipative definite dalla funzione di Rayleigh non solo non disturbano la stabilità della posizione di equilibrio di un sistema conservativo, ma fanno sì che questa posizione (in certi casi) sia asintoticamente stabile.

Nel caso qui considerato, è possibile stabilire delle formule semplici per valutare le radici dell'equazione secolare. Cerchiamo nuovamente una soluzione della forma $ue^{\mu t}$. Per determinare la colonna u, otteniamo l'equazione (vedi pag. 230)

$$(A\mu^2 + B\mu + C)\, u = 0 \tag{4}$$

oppure in forma estesa

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\mu^2 + b_{ik}\mu + c_{ik})\, u_k = 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{4'}$$

Moltiplicando entrambi i membri della i-esima equazione della (4') per $\bar{u}_i$ ($\bar{u}_i$ è il complesso coniugato di u_i) e sommando su i, troviamo

$$\mu^2 \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\bar{u}_i u_k + \mu \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\bar{u}_i u_k + \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}\bar{u}_i u_k = 0$$

o in notazione abbreviata

$$A(u, \bar{u})\,\mu^2 + B(u, \bar{u})\,\mu + C(u, \bar{u}) = 0, \tag{5}$$

dove $A(u, \bar{u}) > 0$, $B(u, \bar{u}) > 0$ e $C(u, \bar{u}) > 0$ [1].

Così, qualunque radice μ dell'equazione secolare soddisfa l'equazione quadratica (5) con coefficienti positivi. Da questo segue immediatamente che $\operatorname{Re}\mu < 0$.

Se l'equazione secolare ha la radice complessa $\mu = \gamma + i\delta$, allora questa stessa equazione ha anche la radice complessa coniugata $\bar{\mu} = \gamma - i\delta$. I numeri μ e $\bar{\mu}$ sono radici dell'equazione quadratica (5). Dunque, assumendo $u = v + iw$, $\bar{u} = v - iw$ (v, w sono vettori colonna reali), possiamo scrivere [2]

$$\begin{cases} 2\operatorname{Re}\mu = \mu + \bar{\mu} = -\dfrac{B(u, \bar{u})}{A(u, \bar{u})} = -\dfrac{B(v, v) + B(w, w)}{A(v, v) + A(w, w)} < 0, \\ |\mu|^2 = \mu\bar{\mu} = \dfrac{C(u, \bar{u})}{A(u, \bar{u})} = \dfrac{C(v, v) + C(w, w)}{A(v, v) + A(w, w)}. \end{cases} \tag{6}$$

Alle radici complesse coniugate μ e $\bar{\mu}$ corrispondono le oscillazioni complesse coniugate $ue^{\mu t}$ e $\bar{u}e^{\bar{\mu} t}$. È possibile ridurre la somma dei termini corrispondenti nell'espressione per q (vedi la formula (12) di pag. 230) alla forma reale con valori complessi coniugati delle

[1] Vedi il punto 5 di pag. 207.
[2] Vedi la formula (20) di pag. 207.

costanti arbitrarie $C = \frac{1}{2}(F + iG)$, $\overline{C} = \frac{1}{2}(F - iG)$:

$$Cue^{\mu t} + \overline{C}\,\overline{u}e^{\overline{\mu}t} = \frac{1}{2}(F+iG)(v+iw)\,e^{(\nu+i\delta)t} +$$

$$+\frac{1}{2}(F-iG)(v-iw)\,e^{(\nu-i\delta)t} =$$

$$= \mathrm{Re}\,\{[Fv - Gw + i(Fw + Gv)]\,e^{\nu t}(\cos\delta t + i\,\mathrm{sen}\,\delta t)\} =$$

$$= e^{\nu t}[(Fv - Gw)\cos\delta t - (Fw + Gv)\,\mathrm{sen}\,\delta t]. \qquad (7)$$

Se abbiamo due radici reali μ e μ' e se denotiamo le colonne corrispondenti con u e u', allora moltiplicando entrambi i membri della i-esima equazione (4') per u_i' (al posto di $\overline{u}_i$), otteniamo al posto della (5) la seguente equazione:

$$A(u,\ u')\,\mu^2 + B(u,\ u')\,\mu + C(u,\ u') = 0. \qquad (8)$$

Intercambiando i ruoli dei vettori u e u', concludiamo che il numero μ' soddisfa anche l'equazione (8). Dunque,

$$\mu + \mu' = -\frac{B(u,\ u')}{A(u,\ u')}, \quad \mu\mu' = \frac{C(u,\ u')}{A(u,\ u')}. \qquad (9)$$

Possiamo ora vedere come le oscillazioni principali di un sistema conservativo cambiano sotto l'azione di *piccole* forze dissipative [1]. Introduciamo le coordinate normali $\theta_1, \ldots, \theta_n$. In funzione di queste coordinate

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\dot{\theta}_i^2, \quad \Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2\theta_i^2, \qquad (10)$$

$$R = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\beta_i\dot{\theta}_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,\,k=1\\(i\neq k)}}^{n}\beta_{ik}\dot{\theta}_i\dot{\theta}_k, \qquad (11)$$

dove ω_i $(i = 1, \ldots, n)$ sono le frequenze principali del sistema conservativo, e i coefficienti nell'espressione (11) per le funzioni di Rayleigh β_i, β_{ik} $(i, k = 1, \ldots, n;\ \beta_{ik} = \beta_{ki}$ per $i \neq k)$ sono piccoli (i quadrati e i prodotti di queste quantità possono essere ignorati). Dalla definizione di positività della forma quadratica (11) segue che $\beta_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Formiamo le equazioni di Lagrange

$$\ddot{\theta}_i + \beta_i\dot{\theta}_i + \omega_i^2\theta_i + \sum_{\substack{k=1\\(k\neq i)}}^{n}\beta_{ik}\dot{\theta}_k = 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \qquad (12)$$

Allora, sostituendo

$$\theta_i = \chi_i e^{\mu t} \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad (13)$$

[1] Vedi E.T. Whittaker, *A treatise on the analytical dinamics of particles and rigid bodies*, Dover Publication, New York, 1944.

e semplificando per $e^{\mu t}$, otteniamo il seguente sistema di equazioni lineari:

$$(\mu^2+\beta_i\mu+\omega_i^2)\,\chi_i+\mu\sum_{\substack{k=1\\(k\neq i)}}^{n}\beta_{ik}\chi_k=0 \quad (i=1,\ \ldots,\ n). \tag{14}$$

Uguagliando il determinante di questo sistema a zero, troviamo l'equazione secolare

$$\begin{vmatrix} \mu^2+\beta_1\mu+\omega_1^2 & \beta_{12}\mu & \ldots & \beta_{1n}\mu \\ \beta_{21}\mu & \mu^2+\beta_2\mu+\omega_2^2 & \ldots & \beta_{2n}\mu \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{n1}\mu & \beta_{n2}\mu & \ldots & \mu^2+\beta_n\mu+\omega_n^2 \end{vmatrix}=0. \tag{15}$$

Sviluppando il determinante e trascurando i termini contenenti i prodotti dei coefficienti piccoli β_i, β_{ik}, possiamo rappresentare l'equazione secolare nella seguente forma:

$$\prod_{k=1}^{n}(\mu^2+\beta_k\mu+\omega_k^2)=0. \tag{16}$$

In prima approssimazione, le radici dell'equazione secolare sono della forma

$$\mu_k\approx-\frac{\beta_k}{2}\pm i\omega_k \quad (k=1,\ \ldots,\ n). \tag{17}$$

Possiamo trovare le ampiezze $\chi_1,\ \chi_2,\ \ldots,\ \chi_n$ per $\mu=\mu_1=-\frac{\beta_1}{2}+i\omega_1$. Sostituendo questo valore di μ nei coefficienti delle ultime $n-1$ equazioni (14) e dividendo i membri sinistri delle equazioni per μ_1, otteniamo

$$\begin{cases} \beta_{21}\chi_1+\left(\beta_2-\beta_1+\dfrac{\omega_2^2-\omega_1^2}{i\omega_1}\right)\chi_2+\ \ldots\ +\beta_{2n}\chi_n=0, \\ \ldots \\ \beta_{n1}\chi_1+\beta_{n2}\chi_2+\ \ldots\ +\left(\beta_n-\beta_1+\dfrac{\omega_n^2-\omega_1^2}{i\omega_1}\right)\chi_n=0. \end{cases} \tag{18}$$

Da questo sistema determiniamo il rapporto $\frac{\chi_k}{\chi_1}$ $(k=2,\ \ldots,\ n)$, scartando i termini in β_i, β_{ik} del secondo ordine e ordine superiore:

$$\frac{\chi_k}{\chi_1}=i\varepsilon_k, \quad \varepsilon_k=-\frac{\beta_{k1}\omega_1}{\omega_k^2-\omega_1^2} \quad (k=2,\ \ldots,\ n). \tag{19}$$

Le formule (19) mostrano che ε_k sono piccole quantità reali $(k=2,\ \ldots,\ n)$. Alla radice $\mu_1=-\frac{\beta_1}{2}+i\omega_1$ corrisponde l'« oscillazione complessa » (assumiamo $\chi_1=Ae^{i\alpha}$, $A>0$)

$$\theta_1=\chi_1e^{\mu_1t}=Ae^{-\frac{\beta_1}{2}t}e^{i(\omega_1t+\alpha)},$$

$$\theta_k=\varepsilon_kAe^{-\frac{\beta_1}{2}t}e^{i\left(\omega_1t+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)} \quad (k=2,\ \ldots,\ n). \tag{20}$$

Considerando la combinazione lineare dell'oscillazione data e dell'oscillazione complessa coniugata, otteniamo un'oscillazione « principale » che corrisponde alle radici

$$\mu_1 = -\frac{\beta_1}{2} + i\omega_1 \quad \text{e} \quad \bar{\mu}_1 = -\frac{\beta_1}{2} - i\omega_1:$$

$$\theta_1 = Ae^{-\frac{\beta_1}{2}t} \operatorname{sen}(\omega_1 t + \alpha),$$

$$\theta_k = \varepsilon_k A e^{-\frac{\beta_1}{2}t} \operatorname{sen}\left(\omega_1 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad (k = 2, \ldots, n). \quad (21)$$

Otteniamo espressioni simili per le altre oscillazioni principali.

Così, *in prima approssimazione*: 1) *le piccole forze dissipative non alterano le frequenze di un sistema conservativo*; 2) *sotto l'azione di queste forze le oscillazioni si smorzano per* $t \to \infty$; 3) *nella j-esima oscillazione principale tutte le coordinate sono piccole in confronto alla j-esima coordinata e differiscono da essa nella fase di un quarto di periodo* ($j = 1, \ldots, n$).

§ 47. *Effetto di una forza esterna dipendente dal tempo sulle piccole oscillazioni di un sistema scleronomo. Caratteristica ampiezza-fase*

Su un sistema scleronomo, oltre alle forze trattate nel § 45, possono agire anche le forze $Q_i(t)$ ($i = 1, \ldots, n$). Allora le equazioni di Lagrange, per piccole oscillazioni del sistema, differiscono dalle equazioni (7) di pag. 229 solamente per il membro destro non nullo:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\ddot{q}_k + b_{ik}\dot{q}_k + c_{ik}q_k) = Q_i(t) \quad (i = 1, \ldots, n). \quad (1)$$

Le soluzioni generali di questo sistema non omogeneo di equazioni differenziali sono date nella forma

$$\boldsymbol{q} = \sum_{h=1}^{2n} C_h \boldsymbol{u}_h e^{\mu_h t} + \boldsymbol{q}^*, \quad (2)$$

dove il primo termine è la soluzione generale del corrispondente sistema omogeneo, e $\boldsymbol{q}^*$ è una soluzione particolare del sistema (1).

Assumiamo che la posizione del sistema $q_1 = \ldots = q_n = 0$ sia una posizione di equilibrio asintoticamente stabile, cioè che Re $\mu_h < 0$ ($h = 1, \ldots, 2n$). Allora il primo termine tende a zero per t tendente all'infinito [1], e per t sufficientemente

[1] Se l'equazione secolare ha radici multiple, allora nella somma a secondo membro della (2) possono comparire termini secolari del tipo $C_h\boldsymbol{u}_h + \boldsymbol{u}'_h t + \boldsymbol{u}''_h t^2 + \ldots) e^{\mu_h t}$. Ad ogni modo, in questo caso anche la somma tende a zero per $t \to \infty$ se tutte le Re $\mu_h < 0$.

grandi la soluzione generale q del sistema non omogeneo praticamente coincide con q^*. Per questa ragione, in futuro ci interesseremo solo alle « oscillazioni forzate » q^*, che denoteremo semplicemente con q.

Poiché il sistema di equazioni differenziali (1) è lineare, il caso generale per la ricerca delle oscillazioni forzate si riduce (a spese di una sovrapposizione lineare di soluzioni particolari) al caso in cui solo una forza generalizzata $Q_i(t)$ non è nulla.

Per esempio, siano $Q_1(t) \not\equiv 0$ e $Q_j(t) = 0$ $(j = 2, \ldots, n)$. Inoltre assumiamo che $Q_1(t)$ sia una forza armonica, cioè

$$Q_1(t) = Ae^{i\Omega t}. \tag{3}$$

Allora le equazioni differenziali (1) saranno scritte come

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} (a_{1k}\ddot{q}_k + b_{1k}\dot{q}_k + c_{1k}q_k) = Ae^{i\Omega t}, \\ \sum_{k=1}^{n} (a_{jk}\ddot{q}_k + b_{jk}\dot{q}_k + c_{jk}q_k) = 0 \quad (j = 2, \ldots, n). \end{cases} \tag{4}$$

Cerchiamo le oscillazioni forzate nella forma

$$q_k = B_k e^{i\Omega t} \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{5}$$

Sostituendo queste espressioni di q_k $(k = 1, \ldots, n)$ nelle equazioni differenziali (4) e semplificando per $e^{i\Omega t}$, otteniamo il seguente sistema di equazioni algebriche per la determinazione delle quantità B_k:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} [a_{1k}(i\Omega)^2 + b_{1k}(i\Omega) + c_{1k}] B_k = A, \\ \sum_{k=1}^{n} [a_{jk}(i\Omega)^2 + b_{jk}(i\Omega) + c_{jk}] B_k = 0 \quad (j = 2, \ldots, n). \end{cases} \tag{6}$$

Risolvendo questo sistema, troviamo per $k = 1, \ldots, n$

$$B_k = W_{1k}(i\Omega) A, \tag{7}$$

dove

$$W_{1k}(i\Omega) = \frac{\Delta_{1k}(i\Omega)}{\Delta(i\Omega)} \tag{8}$$

è una funzione razionale regolare di $i\Omega$ con coefficienti reali; il grafico di questa funzione nel piano complesso, e qualche volta la funzione stessa, è detto *caratteristica di frequenza* o *caratteristica ampiezza-fase*.

Allora la « risposta » della coordinata q_k all'azione esterna $Q_1 = Ae^{i\Omega t}$ si ottiene moltiplicando questa azione per la caratteristica di frequenza $W_{ik}(i\Omega)$:

$$q_k = W_{1k}(i\Omega) Ae^{i\Omega t}. \tag{9}$$

Ponendo

$$W_{1k}(i\Omega) = R_{1k}(\Omega)\, e^{i\Psi_{1k}(\Omega)} \quad [R_{1k}(\Omega) > 0] \tag{10}$$

($R_{1k}(\Omega)$ è la *caratteristica di ampiezza* e $\Psi_{1k}(\Omega)$ è la *caratteristica di fase*), scriviamo la formula (9) come segue:

$$q_k = R_{1k}(\Omega)\, A e^{i[\Omega t + \Psi_{1k}(\Omega)]} \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{11}$$

Sia ora

$$Q_1 = A \operatorname{sen} \Omega t, \tag{12}$$

cioè

$$Q_1 = \frac{A}{2i}(e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}).$$

La risposta corrispondente sarà [1]

$$q_k = \frac{1}{2i} R_{1k}(\Omega)\, A \{e^{i[\Omega t + \Psi_{1k}(\Omega)]} - e^{-i[\Omega t + \Psi_{1k}(\Omega)]}\},$$

cioè

$$q_k = R_{1k}(\Omega)\, A \operatorname{sen} [\Omega t + \Psi_{1k}(\Omega)]. \tag{13}$$

In altre parole, *quando si passa da una forza sinusoidale* (12) *alla corrispondente risposta, cioè all'oscillazione forzata sinusoida-*

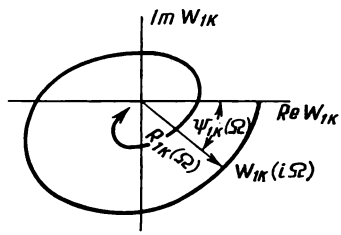


Fig. 53

le (13), *l'ampiezza della forza è moltiplicata per la caratteristica di ampiezza* $R_{1k}(\Omega)$, *e lo spostamento di fase è determinato dalla caratteristica di fase* $\Psi_{1k}(\Omega)$, *considerata per lo stesso valore di* Ω.

La fig. 53 rappresenta la caratteristica ampiezza-fase $W_{1k}(i\Omega)$ $(0 < \Omega < \infty)$. Se per una data Ω la corrispondente $R_{1k}(\Omega)$ è molto piccola, allora l'ampiezza della risposta è estremamente piccola in confronto all'ampiezza dell'« eccitazione » A sen Ωt di frequenza data Ω. Al contrario, se per una data Ω la corrispondente $R_{1k}(\Omega)$ è molto grande, allora l'ampiezza della risposta è grande in confronto all'ampiezza della forza generalizzata Q_1. Così, selezionando un sistema con caratteristiche d'ampiezza adatte, possiamo smorzare le oscillazioni in un certo inter-

[1] Poiché $W_{1k}(i\Omega)$ e $W_{1k}(-i\Omega)$ sono numeri complessi coniugati segue che $R_{1k}(-\Omega) = R_{1k}(\Omega)$ e $\Psi_{1k}(-\Omega) = -\Psi_{1k}(\Omega)$.

vallo di frequenze e incrementare le ampiezze di tali oscillazioni su altre frequenze. Questo è il principio su cui sono basati i *filtri*.

Poiché $W(i\Omega)$ è una funzione razionale regolare e per questa ragione $W(i\Omega) \to 0$ per $\Omega \to \infty$, qualunque sistema lascia passare in realtà solo un intervallo finito di frequenze.

Ora sia $Q_1(t)$ un'arbitraria funzione periodica specificata dalla serie di Fourier [1]

$$Q_1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \operatorname{sen}(m\Omega t + \varphi_m). \tag{14}$$

Combinando le risposte su armoniche separate di questa serie, otteniamo

$$q_k = \sum_{m=0}^{\infty} R_{1k}(m\Omega) A_m \operatorname{sen}[m\Omega t + \varphi_m + \Psi_{1k}(m\Omega)]$$
$$(k = 1, \ldots, n). \tag{15}$$

Ora sia $Q_1(t)$ un'arbitraria funzione $f(t)$ non periodica in t, che può essere data nella forma di un integrale di Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\Omega t}\, d\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\Omega t}\, dt. \tag{16}$$

Ponendo

$$F(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\Omega t}\, dt, \tag{17}$$

avremo

$$Q_1 = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\Omega)\, e^{i\Omega t}\, d\Omega. \tag{18}$$

La funzione $F(\Omega)$ è detta *spettro complesso* della funzione $Q_1 = f(t)$.

All'azione

$$\frac{1}{2\pi} F(\Omega)\, d\Omega e^{i\Omega t}$$

corrisponderà la risposta

$$\frac{1}{2\pi} W_{1k}(i\Omega) F(\Omega)\, d\Omega e^{i\Omega t}.$$

Dunque, procedendo dal principio della sovrapposizione lineare delle risposte, troveremo

$$q_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{1k}(i\Omega) F(\Omega)\, e^{i\Omega t}\, d\Omega \tag{19}$$
$$(k = 1, \ldots, n),$$

[1] Vedi, per esempio, G.M. Fikhtengolts, *Fondamenti di analisi matematica*, Mosca, 1956, vol. 2, cap. 24, § 3 (ed. russa).

cioè, lo spettro complesso $W_{1k}(i\Omega)\ F(\Omega)$ per la coordinata q_k si ottiene moltiplicando lo spettro complesso dell'azione $Q_1(t)$ per la corrispondente caratteristica di frequenza del sistema $W_{1k}(i\Omega)$.

Sia il sistema in posizione di riposo per $t<0$, e il moto del sistema, essendo nulle le condizioni iniziali, sia causato solamente dall'azione esterna $Q(t) \not\equiv 0$ per $t>0$. Considerando lo spettro complesso della risposta nella forma

$$F(\Omega)\ W_{1k}(i\Omega) = G(\Omega) + iH(\Omega), \tag{20}$$

avremo, in accordo con la formula (19),

$$q_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [G(\Omega) + iH(\Omega)]\,[\cos\Omega t + i\,\mathrm{sen}\,\Omega t]\,d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [G(\Omega)\cos\Omega t - H(\Omega)\,\mathrm{sen}\,\Omega t]\,d\Omega +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [G(\Omega)\,\mathrm{sen}\,\Omega t + H(\Omega)\cos\Omega t]\,d\Omega.$$

Poiché $q_k(t)$ è una funzione reale, il secondo termine a destra è nullo [1] e per questa ragione

$$q_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [G(\Omega)\cos\Omega t - H(\Omega)\,\mathrm{sen}\,\Omega t]\,d\Omega. \tag{21}$$

Supponiamo ora che

$$\begin{cases} Q_1(t) = 0, \\ q_k(t) = 0 \quad (k = 1, \ldots, n) \end{cases} \quad \text{per } t<0, \tag{22}$$

allora

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [G(\Omega)\cos\Omega t - H(\Omega)\,\mathrm{sen}\,\Omega t]\,d\Omega \quad (\text{per } t<0).$$

Sostituendo qui t con $-t$ abbiamo

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [G(\Omega)\cos\Omega t + H(\Omega)\,\mathrm{sen}\,\Omega t]\,d\Omega \quad (\text{per } t>0). \tag{23}$$

Sommando termine a termine le equazioni (21) e (23), abbiamo

$$q_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\Omega)\cos\Omega t\,d\Omega \quad (\text{per } (t>0). \tag{24}$$

[1] Un sistema reale non può avere una caratteristica di frequenza che non soddisfi questa condizione.

È possibile mostrare che l'espressione (24) è la soluzione generale di un sistema stabile per la coordinata q_k e per le condizioni (22), poiché le condizioni iniziali sono nulle [1]. La funzione $W_{1k}(\Omega)$ è costruita direttamente dai coefficienti a_{ik}, b_{ik} e c_{ik}, che compaiono nell'equazione (1), e la funzione $F(\Omega)$ è determinata dall'espressione (17). Dopo di che il problema che determina

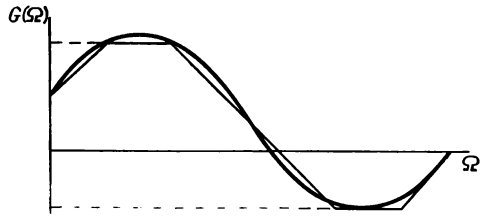


Fig. 54

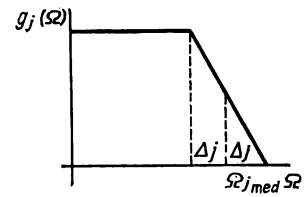


Fig. 55

il moto descritto dall'equazione (1) si riduce ad un'integrazione semplice con l'aiuto della (24).

Per questa ragione, ogni metodo di integrazione approssimata è adatto per una determinazione approssimata del moto. Per esempio, è possibile costruire un grafico della funzione $G(\Omega)$, sostituirlo con una poligonale e tracciare per i punti salienti linee orizzontali fino all'asse delle ordinate. Allora la funzione $G(\Omega)$ è sostituita approssimativamente dalla somma delle funzioni $g_j(\Omega)$, il grafico di ognuna delle quali è un trapezio (un triangolo, nei casi particolari), come mostrato nella fig. 54.

L'integrale (24) può essere calcolato per una di tali funzioni $g_j(\Omega)$ come segue:

$$q_{jk} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\Omega) \cos \Omega t \, d\Omega = \frac{A_j}{\pi} \frac{\operatorname{sen} \Omega_{j\text{med}} t}{\Omega_{j\text{med}}} \frac{\operatorname{sen} \Delta_j t}{\Delta_j t},$$

dove $\Omega_{j\ \text{med}}$ e Δ_j sono rappresentati nella fig. 55, e A_j è l'area del trapezio. Dunque,

$$q_k \approx \frac{1}{\pi} \sum_j A_j \frac{\operatorname{sen} \Omega_{j\text{med}} t}{\Omega_{j\text{med}}} \frac{\operatorname{sen} \Delta_j t}{\Delta_j t},$$

dove la sommatoria è considerata su tutti i trapezi ottenuti dall'approssimazione di $G(\Omega)$ con una poligonale.

Le tabelle della funzione $\frac{\operatorname{sen} z}{z}$ possono essere usate per un'approssimazione come questa nella costruzione dei moti.

[1] Questo segue dal fatto che l'espressione (20) definisce la trasformazione di Fourier della soluzione per condizioni iniziali nulle, e l'espressione (24) definisce la trasformazione inversa di Fourier (vedi, per esempio, M.A. Ajzerman, *Lezioni sulla teoria del controllo automatico*, II ed., Fizmatgiz, 1958; ed. russa).

VII. Sistemi con coordinate cicliche

§ 48. *Sistema ridotto. Potenziale di Routh. Moti incogniti. Concezione di Hertz dell'origine cinetica dell'energia potenziale*

In questo capitolo vengono usate le proposizioni generali date nei capitoli II e V per studiare i moti di un sistema scleronomo olonomo con coordinate cicliche q_α ($\alpha = m+1, \ldots, n$). L'energia cinetica di tale sistema ha la forma

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r,\, s=1}^{n} a_{rs}(q_1, \ldots, q_m)\, \dot{q}_r \dot{q}_s . \tag{1}$$

Troviamo un'espressione nelle variabili di Routh q_i, $\dot{q}_i$, p_α ($i = 1, \ldots, m$; $\alpha = m+1, \ldots, n$) per l'energia cinetica. Fatto ciò, esprimiamo tutte le $\dot{q}_\alpha$ in funzione delle p_α ($\alpha = m+1, \ldots, n$) utilizzando le relazioni iniziali

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_{i=1}^{m} a_{\alpha i}\dot{q}_i + \sum_{\beta=m+1}^{n} a_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta \quad (\alpha = m+1, \ldots, n). \tag{2}$$

Dato che il determinante $D = \det (a_{\alpha\beta})_{\alpha,\, \beta=m+1}^{n} \neq 0$ [1], dalle relazioni (2) otteniamo

$$\dot{q}_\alpha = \sum_{\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta}\left(p_\beta - \sum_{i=1}^{m} \alpha_{\beta i}\dot{q}_i\right) \quad (\alpha = m+1, \ldots, n), \tag{3}$$

dove $\| b_{\alpha\beta} \|_{m+1}^{n}$ è la matrice inversa della matrice $\| a_{\alpha\beta} \|_{m+1}^{n}$,

$$\| b_{\alpha\beta} \| = \| a_{\alpha\beta} \|^{-1}. \tag{4}$$

Considerando

$$\gamma_{\alpha i} = \sum_{\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta} a_{\beta i} \quad (i = 1, \ldots, m;\ \alpha = m+1, \ldots, n), \tag{5}$$

scriviamo la (3) nella seguente forma:

$$\dot{q}_\alpha = \sum_{\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta} p_\beta - \sum_{i=1}^{m} \gamma_{\alpha i}\dot{q}_i \quad (\alpha = m+1, \ldots, n). \tag{6}$$

[1] Vedi nota a pag. 79.

Qui, $b_{\alpha\beta}$ e $\gamma_{\alpha i}$ sono funzioni delle coordinate non cicliche q_i ($i = 1, \ldots, m$) (o, come sono qualche volta chiamate, *di posizioni*). Sostituendo l'espressione (6) per le $\dot{q}_\alpha$ nella formula (1), otteniamo l'espressione $\widehat{T}$ per l'energia cinetica nelle variabili di Routh:

$$\widehat{T} = \frac{1}{2} \sum_{i,\, j=1}^{m} a^*_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\, \beta=m+1}^{n} a^*_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta + \sum_{i=1}^{m} \sum_{\alpha=m+1}^{n} a^*_{i\alpha} \dot{q}_i p_\alpha . \qquad (7)$$

Una circostanza da sottolineare (osservata da Routh) è che in questa formula tutte le $a^*_{i\alpha} = 0$, cioè l'espressione di $\widehat{T}$ è la somma della forma quadratica nelle velocità di posizione $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m$ e della forma quadratica nei momenti generalizzati $p_{m+1}, \ldots, p_n$ [1].

Infatti,

$$a^*_{i\alpha} = \frac{\partial^2 \widehat{T}}{\partial \dot{q}_i \, \partial p_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\sum_{\beta=m+1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\beta} \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial p_\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{\beta=m+1}^{n} b_{\beta\alpha} p_\beta = 0, \qquad (8)$$

poiché $\sum_{\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta} p_\beta$ dipende solo dalle variabili q_i e p_β, che sono considerate indipendenti rispetto alle variabili $\dot{q}_i$ ($i = 1, \ldots, m$; $\beta = m + 1, \ldots, n$).

Calcoliamo ora i coefficienti $a^*_{\alpha\beta}$:

$$a^*_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \widehat{T}}{\partial p_\alpha \, \partial p_\beta} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \sum_{\gamma=m+1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\gamma} \frac{\partial \dot{q}_\gamma}{\partial p_\beta} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \sum_{\gamma=m+1}^{n} b_{\gamma\beta} p_\gamma = b_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = m+1, \ldots, n). \qquad (9)$$

Analogamente, troviamo i coefficienti a^*_{ij} [2]

$$a^*_{ij} = \frac{\partial^2 \widehat{T}}{\partial \dot{q}_i \, \partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{\alpha=m+1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \dot{q}_j} \right]_{\dot{q}_\alpha = \ldots} =$$

[1] La trasformazione delle variabili qui usata, che corrisponde ad una transizione delle variabili $\dot{q}_i$, $\dot{q}_\alpha$ alle variabili $\dot{q}_i$, p_α è ordinariamente usata nella teoria delle forme quadratiche per ridurre (con il metodo di Lagrange) una forma quadratica in una somma di quadrati. Infatti, applicando queste trasformazioni più volte, possiamo rappresentare una forma quadratica in n variabili nella forma di una somma di n forme quadratiche ognuna delle quali è uguale al prodotto del quadrato di questa variabile per un qualunque coefficiente reale.

[2] Qui e più avanti $\dot{q}_\alpha = \ldots$ significa che tutte le $\dot{q}_\alpha$ nell'espressione nella parentesi quadra sono sostituite dalle loro espressioni (6).

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right]_{\dot{q}_\alpha = \ldots} - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\sum_{\alpha=m+1}^{n} \gamma_{\alpha i} p_\alpha = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right]_{\dot{q}_\alpha = \ldots} =$$

$$= \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} + \sum_{\alpha=m+1}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_\alpha}\frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \dot{q}_i} = a_{ij} - \sum_{\alpha=m+1}^{n} \gamma_{\alpha i} a_{\alpha j}.$$

Utilizzando le equazioni (5) otteniamo

$$a^*_{ij} = a_{ij} - \sum_{\alpha,\,\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta} a_{\alpha j} a_{\beta i} \quad (i,\ j = 1,\ \ldots,\ m). \tag{10}$$

Ma sulla base della (4), $b_{\alpha\beta} = \frac{A_{\beta\alpha}}{D}$, dove $A_{\beta\alpha}$ è il complemento algebrico dell'elemento $a_{\beta\alpha}$ nel determinante D. Avvantaggiandoci di questo fatto, al posto della (10) possiamo scrivere

$$a^*_{ij} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i,\,m+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{m+1,\,j} & a_{m+1,\,m+1} & \cdots & a_{m+1,\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nj} & a_{n,\,m+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i,\ j = 1,\ \ldots,\ m). \tag{10'}$$

Dunque, la formula (7) assume la forma

$$\widehat{T} = \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{m} a^*_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\,\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta. \tag{11}$$

Qui i coefficienti a^*_{ij} e $b_{\alpha\beta}$ sono determinati dalle equazioni (4) e (10).

Le forze applicate al sistema scleronomo abbiano il potenziale $\Pi = \Pi(t,\ q_i)$. Allora $L = T - \Pi$. Calcoliamo la funzione di Routh (vedi § 13):

$$R = R(t,\ q_i,\ \dot{q}_i,\ p_\alpha) = \sum_{\alpha=m+1}^{n} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L =$$

$$= \sum_{\alpha=m+1}^{n} p_\alpha \Big(\sum_{\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta} p_\beta - \sum_{i=1}^{m} \gamma_{\alpha i}\dot{q}_i\Big) - T + \Pi =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{m} a^*_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\,\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta +$$

$$+ \Pi - \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{\alpha=m+1}^{n} \gamma_{\alpha i} p_\alpha\Big)\dot{q}_i. \tag{12}$$

Si consideri la funzione $\Pi^* (t, q_i, p_\alpha)$, che chiameremo *potenziale di Routh* [1]:

$$\Pi^* = \Pi + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta = m+1}^{n} b_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta. \tag{13}$$

Considerando il fatto che

$$b_{\alpha\beta} = \frac{A_{\beta\alpha}}{D},$$

dove $A_{\beta\alpha}$ è il complemento algebrico dell'elemento $a_{\beta\alpha}$ nel determinante D, possiamo scrivere l'espressione del potenziale di Routh anche nella seguente forma:

$$\Pi^* = \Pi - \frac{1}{2D} \begin{vmatrix} 0 & p_{m+1} & \cdots & p_n \\ p_{m+1} & a_{m+1,\, m+1} & \cdots & a_{m+1,\, n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_n & a_{n,\, m+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{13'}$$

Introduciamo inoltre la notazione

$$T^* = \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^{m} a^*_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \tag{14}$$

Allora, in accordo con la (12), la funzione $-R$, che per le coordinate di posizione gioca il ruolo della funzione lagrangiana, è

$$T^* - V, \tag{15}$$

dove V è il potenziale generalizzato definito dall'equazione

$$V = -\sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{\alpha=m+1}^{n} \gamma_{\alpha i} p_\alpha \Big) \dot{q}_i + \Pi^* (t, q_i, p_\alpha). \tag{16}$$

Consideriamo ora un qualunque moto del sistema inerziale. In questo moto,

$$p_\alpha = \text{cost} = c_\alpha \quad (\alpha = m + 1, \ldots, n) \tag{17}$$

e la variazione delle coordinate di posizione $q_i = q_i (t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ può essere determinata dalle equazioni differenziali (8) di pag. 82, in cui p_α deve essere ovunque sostituita con c_α $(\alpha = m + 1, \ldots, n)$. Ma queste sono le equazioni di Lagrange (con funzione lagrangiana $-R = T^* - V$) per un certo sistema scleronomo naturale ausiliario avente m gradi di libertà ed energia cinetica $T^* = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} a^*_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$ ed il potenziale

[1] E.G. Routh, *The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies*, 5 edizione, 1892, § 99.

delle forze generalizzate $V = -\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{\alpha=m+1}^{n} \gamma_{\alpha i} c_\alpha\right) \dot{q}_i + \Pi^* (t, q_i, c_\alpha)$. Il potenziale di Routh $\Pi^* (t, q_i, c_\alpha)$ è l'energia potenziale di questo sistema. Dalle formule (11), (12) e (13) segue che

$$T + \Pi = T^* + \Pi^*. \tag{18}$$

Chiameremo questo sistema ausiliario *sistema ridotto.*

Dunque, *la variazione delle coordinate di posizione* $q_1, \ldots, q_m$ *determina il moto di un sistema ridotto (con m gradi di libertà) con energia cinetica* T^* *e con potenziale generalizzato* $V = V_1 + \Pi^*$, *dove* Π^* *è il potenziale di Routh. Dati dei moti appropriati dei sistemi iniziale e ridotto, le energie totali di questi sistemi sono uguali.*

Quando le funzioni $q_i = q_i (t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ che definiscono il moto di un sistema ridotto sono determinate, allora la variazione temporale delle coordinate cicliche $q_\alpha = q_\alpha (t)$ $(\alpha = m + 1, \ldots, n)$ può essere determinata dalle formule (9) di pag. 82, che possono essere ora scritte come

$$q_\alpha = \int \left[\frac{\partial \Pi^* (t, q_i, c_\alpha)}{\partial c_\alpha} - \sum_{j=1}^{m} \gamma_{\alpha j} (q_i) \dot{q}_j\right] dt + c_\alpha \tag{19}$$

$$(\alpha = m + 1, \ldots, n).$$

Consideriamo il caso particolare in cui l'espressione dell'energia cinetica del sistema iniziale (1) non contenga i prodotti delle velocità di posizione $\dot{q}_i$ per le velocità cicliche $\dot{q}_\alpha$, cioè il caso in cui tutte le $a_{i\alpha} = 0$ $(i = 1, \ldots, m;\ \alpha = m + 1, \ldots, n)$. In questo caso, l'energia cinetica T si trasforma in due forme quadratiche, una delle quali contiene solo le velocità di posizione $\dot{q}_i$, mentre l'altra contiene solo le velocità cicliche $\dot{q}_\alpha$. Tale sistema è detto *giroscopicamente libero.* Per un sistema giroscopicamente libero, in accordo con le formule (5), tutte le $\gamma_{\alpha i} = 0$, e dunque, $V_1 = 0$ e $V = \Pi^*$. Così, *se il sistema iniziale è giroscopicamente libero, il sistema ridotto ha potenziale ordinario* Π^* [1].

Inoltre, dalle (10) segue che per il sistema giroscopicamente libero $a^*_{ij} = a_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, m)$, cioè

$$T^* = \frac{1}{2} \sum_{i,\, j=1}^{m} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \tag{20}$$

---

[1] Il sistema ridotto è sottoposto alle forze potenziali $-\frac{\partial \Pi^*}{\partial q_i}$ ed alle forze giroscopiche determinate dal potenziale V_1. Nel caso di un sistema giroscopicamente libero $V_1 = 0$ e sono assenti anche le forze giroscopiche.

In questo caso, il sistema iniziale ha energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,\, j=1}^{m} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\, \beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta} c_\alpha c_\beta$$

e l'energia potenziale $\Pi = \Pi(t,\ q_i)$ mentre il sistema ridotto ha energia cinetica $T^* = \frac{1}{2} \sum_{i,\, j=m+1}^{n} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$ e energia potenziale

$$\Pi^* = \Pi(t,\ q_i) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\, \beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta} c_\alpha c_\beta .$$

Osserviamo che *la parte dell'energia cinetica del sistema iniziale* $\left(\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\, \beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta} c_\alpha c_\beta\right)$ *si trasforma nell'energia potenziale del sistema ridotto.*

Tutto ciò che è stato detto di un sistema scleronomo è vero, in particolare, per un sistema conservativo in cui $\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0$, cioè $\Pi = \Pi(q_i)$. Il sistema ridotto per un sistema conservativo giroscopicamente libero sarà ancora conservativo.

Sia dato ora un arbitrario sistema conservativo con m gradi di libertà, con energia cinetica $T^* = \frac{1}{2} \sum_{i,\, j=1}^{m} a_{ij}(q_1, \ldots, q_m) \times$ $\times \dot{q}_i \dot{q}_j$ ed energia potenziale $\Pi^* = \Pi^*(q_i)$. Si consideri un sistema conservativo in cui il numero di gradi di libertà sia $m + 1$ e che abbia m coordinate di posizione $q_1, \ldots, q_m$ e una coordinata ciclica q_{m+1}.

Nel nuovo sistema sia $\Pi = 0$ e l'energia cinetica abbia la forma

$$T = T^* + \frac{1}{2} \frac{k}{\Pi^*(q_i)} \dot{q}_{m+1}^2 \qquad (k = \text{cost}).$$

Allora

$$p_{m+1} = \frac{k}{\Pi^*(q_i)} \dot{q}_{m+1}$$

e

$$T = T^* + \frac{1}{2k} \Pi^*(q_i)\, p_{m+1}^2 .$$

Ma allora per $p_{m+1} = c_{m+1} = \sqrt{2k}$

$$\frac{1}{2} \Pi^*(q_i)\, p_{m+1}^2 = \Pi^*(q_i).$$

Così, nel dato sistema conservativo, l'energia cinetica è T^* e l'energia potenziale $\Pi^* = \Pi^*(q_i)$, mentre nel nuovo sistema « esteso » $T = T^* + \Pi^*(q_i)$ e $\Pi = 0$.

L'energia potenziale del sistema dato si ottiene dall'energia cinetica del sistema « esteso » che ha un numero di gradi di libertà maggiore.

I moti, per i quali variano solo le coordinate cicliche (nascoste), sono detti moti nascosti [1].

Abbiamo visto sopra che *l'energia potenziale di un sistema conservativo può sempre essere considerata come l'energia cinetica dei moti nascosti.*

Questa concezione sull'origine cinetica dell'energia potenziale e, dunque, sull'origine cinetica delle forze applicate ai

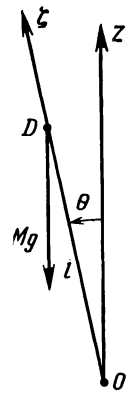


Fig. 56

corpi che compiono moti espliciti (non nascosti) è stata sviluppata largamente da Hertz nel 1894 [2].

Esempio. Consideriamo il moto di un corpo rigido con un punto fissato O nel caso lagrangiano, quando il corpo è sottoposto alla forza di gravità Mg, c'è un asse di simmetria dinamica e il centro di gravità D è localizzato su quest'asse.

Individuiamo il corpo rigido per mezzo dei tre angoli di Eulero θ, ψ, φ, dove l'angolo di nutazione θ è l'angolo tra l'asse verticale Oz e l'asse di simmetria dinamica $O\zeta$ (fig. 56), ψ è l'angolo di precessione, e φ è l'angolo di pura rotazione. Sia $l = OD$ e A e C siano rispettivamente i momenti

[1] I sistemi che contengono in sé giroscopi sono un brillante esempio del manifestarsi dei moti nascosti. A causa di questi moti « nascosti » dei giroscopi, il moto di tale sistema differisce radicalmente dal moto dei sistemi senza giroscopi.

[2] H. Hertz, *Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt*, vedi anche W. Thomson e P. Tait, *Treatise on natural philosophy*, Part 1, § 319 e A.G. Webster, *The dynamics of particles and of rigid, elastic and fluid bodies*, 1925.

d'inerzia equatoriale e assiale. Allora

$$2T = A\,(p^2 + q^2) + Cr^2, \qquad \Pi = Mgl\cos\theta,$$

dove p, q, r sono le proiezioni della velocità angolare ω sugli assi principali d'inerzia $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$. Ma

$$p^2+q^2=\dot\theta^2+\dot\psi^2\operatorname{sen}^2\theta, \qquad r=\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta;$$

dunque, abbiamo finalmente

$$2T=A\,(\dot\theta^2+\dot\psi^2\operatorname{sen}^2\theta)+C\,(\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta)^2, \qquad \Pi=Mgl\cos\theta. \tag{21}$$

Troviamo le espressioni per i momenti generalizzati p_φ, p_ψ corrispondenti alle coordinate cicliche φ, ψ:

$$\begin{cases} p_\psi=(A\operatorname{sen}^2\theta+C\cos^2\theta)\,\dot\psi+C\cos\theta\,\dot\varphi, \\ p_\varphi=C\cos\theta\,\dot\psi+C\dot\varphi. \end{cases} \tag{22}$$

Risolvendo queste relazioni in $\dot\psi$ e $\dot\varphi$, abbiamo

$$\begin{cases} \dot\psi=\dfrac{p_\psi-\cos\theta\,p_\varphi}{A\operatorname{sen}^2\theta}, \\ \dot\varphi=\dfrac{-C\cos\theta p_\psi+(A\operatorname{sen}^2\theta+C\cos^2\theta)\,p_\varphi}{AC\operatorname{sen}^2\theta}. \end{cases} \tag{23}$$

I coefficienti di p_ψ e p_φ nei membri destri della (23) sono le quantità $b_{\alpha\beta}$. L'espressione per l'energia cinetica nelle variabili di Routh θ, $\dot\theta$, p_ψ, p_φ si ottiene sostituendo le espressioni (23) di $\dot\varphi$ e $\dot\psi$ nella (21) per $2T$ o direttamente dalla formula (11) [1]:

$$2T=A\dot\theta^2=\frac{Cp_\psi^2-2C\cos\theta\,p_\psi p_\varphi+(A\operatorname{sen}^2\theta+C\cos^2\theta)\,p_\varphi^2}{AC\operatorname{sen}^2\theta}, \tag{24}$$

Quando il sistema è in moto, i momenti p_ψ e p_φ rimangono costanti:

$$p_\psi=a, \qquad p_\varphi=b. \tag{25}$$

Il moto di nutazione è determinato dal sistema ridotto, per cui

$$T^*=\frac{1}{2}A\dot\theta^2, \qquad \Pi^*=Mgl\cos\theta+\frac{(a-b\cos\theta)^2}{A\operatorname{sen}^2\theta}+\frac{b^2}{C}. \tag{26}$$

La variazione dell'angolo di nutazione $\theta=\theta\,(t)$ si trova dal corrispondente integrale dell'energia

$$\frac{1}{2}A\dot\theta^2+Mgl\cos\theta+\frac{(a-b\cos\theta)^2}{A\operatorname{sen}^2\theta}=\text{cost}=h. \tag{27}$$

Introduciamo la variabile ausiliaria $u=\cos\theta$. Moltiplicando entrambi i membri della (27) per $\frac{2}{A}(1-u^2)=\frac{2}{A}\operatorname{sen}^2\theta$, troviamo

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2=f(u), \tag{28}$$

dove $f(u)$ è un polinomio di terzo grado in u:

$$f(u)=\frac{2}{A}\,(h-Mglu)\,(1-u^2)-\frac{2}{A^2}\,(a-bu)^2. \tag{29}$$

[1] Nel caso dato il corpo rigido è un sistema giroscopicamente libero, così che nella formula (11) $a_{ij}^*=a_{ij}$ $(i,\,j=1,\,\ldots,\,m)$.

Ponendo $u = \pm 1$ e $u = u_0 = \cos\theta_0 < 1$, troviamo [1]

$$f(-1) < 0, \quad f(u_0) = \left(\frac{du}{dt}\right)_0^2 > 0, \quad f(+1) < 0.$$

Allora il polinomio $f(u)$ ha tre radici reali $u_1 = \cos\theta_1$, $u_2 = \cos\theta_2$ e u':

$$-1 < u_1 < u_2 < 1 < u'$$

e (poiché $f(+\infty) = +\infty$) il grafico del polinomio $f(u)$ è come quello rappresentato nella fig. 57.

Poiché, quando il corpo è in moto, $-1 \leqslant u = \cos\theta \leqslant +1$ e $f(u) = \left(\frac{du}{dt}\right)^2 \geqslant 0$, segue che $u = \cos\theta$ deve variare nell'intervallo $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$,

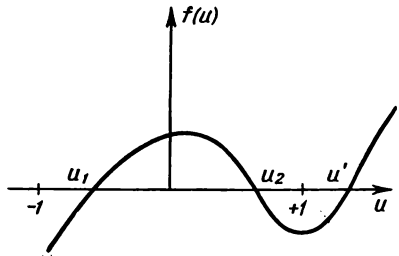


Fig. 57

cioè $\theta_1 \geqslant \theta \geqslant \theta_2$. La velocità angolare di precessione è determinata dalla prima formula della (23):

$$\dot{\psi} = \frac{a - b\cos\theta}{A\,\mathrm{sen}^2\,\theta}. \tag{30}$$

Se il rapporto $\frac{a}{b}$ sta fuori dell'intervallo $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$, allora la velocità di precessione $\dot{\psi}$ mantiene il segno costante e il moto di precessione ha per tutto il tempo la stessa direzione. In questo caso la traccia lasciata dall'asse $O\zeta$ su una sfera fissata con centro in O descrive la curva rappresentata nella fig. 58.

Ma se $u_1 < \frac{a}{b} < u_2$, allora la velocità di precessione cambia di segno quando $\cos\theta^* = \frac{a}{b}$, e la traccia dell'asse dinamico descrive sulla sfera una curva, come rappresentato nella fig. 59.

Se $\frac{a}{b} = u_2$, allora la velocità di precessione $\dot{\psi}$ non cambia di segno, ma si annulla sul parallelo superiore $\theta = \theta_2$ (fig. 60) [2].

Analiticamente, il cambiamento dell'angolo di nutazione si trova dalle formule

$$\pm \int \frac{du}{\sqrt{f(u)}} = t + \mathrm{cost}, \quad \theta = \arccos u. \tag{31}$$

[1] Qui assumiamo che $a \neq \pm b$. I casi particolari $a = \pm b$ saranno considerati più avanti. Inoltre il valore iniziale θ_0 è scelto in modo tale che $\dot{\theta}_0 \neq 0$ e, dunque, $\left(\frac{du}{dt}\right)_0 \neq 0$.

[2] Può essere dimostrato che $\dot{\psi}$ non può annullarsi sul parallelo inferiore.

Il segno positivo è considerato quando θ varia da θ_2 a θ_1 e il segno negativo quando varia in modo inverso. È ovvio che la variazione dell'angolo θ nel tempo sarà una funzione periodica $\theta(t)$ con periodo

$$\tau = 2\int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{f(u)}}. \tag{32}$$

Dopo che la variazione dell'angolo di nutazione $\theta = \theta(t)$ è stata trovata, le variazioni degli angoli ψ e φ sono determinate dalle formule (23).

Consideriamo ora il moto di un corpo rigido passante per la posizione « singolare » $\theta = 0$. In questo punto l'energia cinetica è data dalla forma

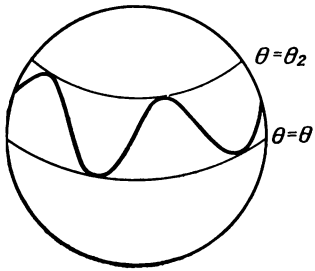


Fig. 58

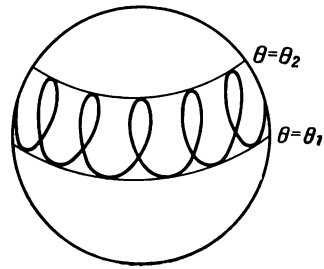


Fig. 59

quadratica degenere (vedi espressione (21) per $\theta = 0$)

$$2T = A\dot{\theta}^2 + C(\dot{\psi}+\dot{\varphi})^2. \tag{33}$$

In accordo con le formule (22), l'equazione $p_\psi = p_\varphi$, cioè

$$a = b, \tag{34}$$

è vera nel punto singolare $\theta = 0$. Assumendo che le costanti arbitrarie a e b siano legate dalla relazione (34), calcoliamo facilmente la forma inde-

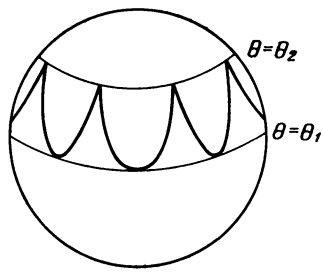


Fig. 60

terminata del potenziale di Routh [1] nell'espressione (26):

$$\Pi^* = Mgl\cos\theta + \frac{a^2}{A}\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}.$$

[1] Nell'espressione per Π^* scartiamo il termine costante $\frac{b^2}{B}$.

Allora il moto a nutazione è nuovamente determinato dall'integrale dell'energia $T^* + \Pi^* = \text{cost}$.

Se il moto passa dalla posizione « singolare » $\theta = \pi$, allora al posto della (34) avremo la relazione

$$a = -b$$

e l'espressione per il potenziale di Routh assumerà la forma

$$\Pi^* = Mgl\cos\theta + \frac{a^2}{A}\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}.$$

Nei due casi « singolari » su considerati, il parallelo superiore (o, rispettivamente, inferiore) delle figg. 58-60 degenera in un punto.

§ 49. *Stabilità dei moti stazionari*

Consideriamo un sistema conservativo la cui posizione è specificata da m coordinate di posizione q_i e da $n - m$ coordinate cicliche q_α ($i = 1, \ldots, m$; $\alpha = m + 1, \ldots, n$). Il moto di tale sistema è definito dalle equazioni canoniche

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \qquad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \quad (r = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

dove l'energia totale del sistema $H = H(q_i, p_i, p_\alpha)$ ha la forma

$$H = \frac{1}{2}\sum_{r,\,s=1}^{n} c_{rs}(q_1, \ldots, q_m)\, p_r p_s + \Pi(q_1, \ldots, q_m), \tag{2}$$

dove la forma quadratica del membro destro è definita positiva [1]. Quando il sistema è in moto, la funzione H ed i momenti generalizzati p_α ($\alpha = m + 1, \ldots, n$) non sono alterati nei loro valori, cioè queste quantità sono gli integrali del moto:

$$\begin{cases} H(q_i, p_i, p_\alpha) = H(q_i^0, p_i^0, p_\alpha^0), \\ p_\alpha = p_\alpha^0 \quad (\alpha = m+1, \ldots, n). \end{cases} \tag{3}$$

Il moto di un sistema è detto *stazionario* se durante il moto stesso tutte le coordinate di posizione restano costanti $q_i = \text{cost} = q_i^0$ ($i = 1, \ldots, m$).

Nel moto stazionario tutte le velocità di posizione sono nulle e dunque, dalle equazioni (1) e dall'uguaglianza (2),

$$\dot{q}_i = \sum_{k=1}^{m} c_{ik}(q_i^0)\, p_k + \sum_{\alpha=m+1}^{n} c_{i\alpha}(q_i^0)\, p_\alpha^0 = 0 \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{4}$$

---

[1] Questa forma quadratica è l'energia cinetica del sistema espressa in funzione dei momenti generalizzati.

Segue da queste relazioni [1] che in un moto stazionario tutti i momenti di posizione hanno anche grandezza costante $p_i = \text{cost} = p_i^0$. Poiché $\dot{q}_i = \dot{p}_i = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, segue dalla (1) che per un moto stazionario

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{5}$$

Le equazioni (5) sono condizioni necessarie e sufficienti che i valori iniziali q_i^0, p_i^0, p_α^0 $(i = 1, \ldots, m;\ \alpha = m + 1, \ldots, n)$ debbono soddisfare perché il moto definito da esse sia stazionario.

Osserviamo che in un moto stazionario le velocità cicliche $\dot{q}_\alpha$ $(\alpha = m + 1, \ldots, n)$ hanno anch'esse valore costante, poiché dalla (1)

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \sum_{s=1}^{n} c_{\alpha s}(q^0)\, p_s^0 = \text{cost} \quad (\alpha = m+1, \ldots, n). \tag{6}$$

Dunque,

$$q_\alpha = \dot{q}_\alpha^0 (t - t_0) + q_\alpha^0 \quad (\alpha = m+1, \ldots, n). \tag{7}$$

Le coordinate cicliche iniziali q_α^0 sono costanti arbitrarie e non appaiono tra le condizioni (5).

Dunque, *in un moto stazionario le coordinate di posizione rimangono costanti, mentre le coordinate cicliche variano secondo una legge lineare.*

Esempio. *La precessione regolare di un giroscopio simmetrico pesante* è un esempio di moto stazionario.

Infatti, la precessione regolare è caratterizzata dalle equazioni

$$\theta = \text{cost} = \theta_0, \quad \dot{\psi} = \text{cost}, \quad \dot{\varphi} = \text{cost},$$

dove l'angolo di precessione ψ e l'angolo di rotazione pura φ sono coordinate cicliche, mentre l'angolo di nutazione θ, un angolo formato dall'asse del giroscopio e la verticale, è una coordinata di posizione [2].

Osserviamo che, in accordo con le relazioni (6), una piccola variazione delle quantità iniziali q_i^0, p_i^0, p_α^0 provoca una piccola variazione delle velocità cicliche originali $\dot{q}_\alpha^0$ $(\alpha = m + 1, \ldots, n)$. Ad ogni modo, una piccola variazione delle quantità $\dot{q}_\alpha^0$, in accordo con la formula (7), provoca, al trascorrere del tempo, una variazione arbitrariamente grande delle stesse coordinate cicliche. Per questa ragione, *un moto stazionario non può essere stabile rispetto alle coordinate cicliche.*

---

[1] Le relazioni (4) possono essere risolte nei momenti di posizione p_k, poiché il determinante $\det [c_{ik}(q_j^0)]_{i,k=1}^{m}$ è diverso da zero e poiché la forma quadratica $\sum_{r,s=1}^{n} c_{rs} p_r p_s$ è definita positiva.

[2] Dalle (21) del paragrafo precedente si è visto che le coordinate φ e ψ non compaiono esplicitamente nell'espressione dell'energia cinetica e dell'energia potenziale.

D'ora in avanti, per stabilità di un moto stazionario intenderemo la stabilità rispetto a tutti i momenti p_i e p_α e alle coordinate di posizione q_i $(i = 1, \ldots, m;\ \alpha = m + 1, \ldots, n)$ [1].

Allora abbiamo il seguente **criterio di stabilità di un moto stazionario.**

Il moto con condizioni iniziali q_i^0, p_i^0, p_α^0 $(i = 1, \ldots, m;\ \alpha = m + 1, \ldots, n)$ *è un moto stazionario stabile se la funzione* $H(q_i, p_i, p_\alpha^0)$ *ha un estremo assoluto nel punto* $q_i = q_i^0$, $p_i = p_i^0$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Infatti, il moto qui considerato sarà stazionario poiché dall'esistenza di un estremo della funzione $H(q_i, p_i, p_\alpha^0)$ segue che le quantità q_i^0, p_i^0 $(i = 1, \ldots, m)$ insieme alle quantità p_α^0 $(\alpha = m + 1, \ldots, n)$ soddisfano le equazioni (5). Introduciamo le deviazioni

$$\xi_i = q_i - q_i^0, \quad \eta_i = p_i - p_i^0, \quad \eta_\alpha = p_\alpha - p_\alpha^0.$$

Allora, utilizzando l'integrale del moto $H(q_i^0 + \xi_i, p_i^0 + \eta_i, p_\alpha^0)$ come funzione di Ljapunov, possiamo concludere (vedi pag. 184) che la soluzione nulla $\xi_i = 0$, $\eta_i = 0$ (cioè il moto stazionario) è stabile se si assume che i momenti ciclici p_α non subiscano perturbazioni (cioè che queste quantità assumano gli stessi valori p_α^0 sia per un moto perturbato che per uno non perturbato [2]).

Ad ogni modo, il criterio di stabilità su considerato è valido nel caso generale, quando per un moto perturbato le quantità $\eta_\alpha = p_\alpha - p_\alpha^0$ $(\alpha = m + 1, \ldots, n)$ sono diverse da zero [3]. Per vedere questo, sarà sufficiente usare il corollario del teorema di Ljapunov (pag. 184), considerando la funzione

$$[H(q_i^0 + \xi_i, p_i^0 + \eta_i, p_\alpha^0) - H(q_i^0, p_i^0, p_\alpha^0)]^2 + \sum_{\alpha=m+1}^{n} \eta_\alpha^2 \qquad (8)$$

come funzione di Ljapunov. Questa funzione è l'integrale del moto e ha un minimo stretto uguale a zero in $\xi_i = 0$, $\eta_i = 0$, $\eta_\alpha = 0$ $(i = 1, \ldots, m;\ \alpha = m + 1, \ldots, n)$.

Stabiliamo un'analogia tra la stabilità dello stato di equilibrio e la stabilità di un moto stazionario. Consideriamo un sistema ridotto con m coordinate indipendenti $q_1, \ldots, q_m$ e con energia potenziale uguale al potenziale di Routh:

$$\Pi^*(q_i, p_\alpha^0) = \Pi(q_i) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\, \beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta}(q_i)\, p_\alpha^0 p_\beta^0 \qquad (9)$$

(vedi paragrafo precedente). Il sistema ridotto è sottoposto a forze

[1] Oppure, che è la stessa cosa, la stabilità rispetto alle quantità q_i, q_i, p_α $(i = 1, \ldots, m;\ \alpha = m + 1, \ldots, n)$.

[2] Questo è precisamente il tipo di stabilità che Routh considerò.

[3] G.K. Požaritskij, « Matematica applicata e meccanica », vol. 22, fasc. 2, 1958 (ed. russa).

giroscopiche oltre alle forze potenziali $-\frac{\partial \Pi^*}{\partial q_i}$ $(i = 1, \ldots, m)$. Poiché al moto stazionario del sistema iniziale $q_i = q_i^0$, $p_\alpha = p_\alpha^0$ $(i = 1, \ldots, m;\ \alpha = m + 1, \ldots, n)$ corrisponde una posizione di equilibrio del sistema ridotto, segue che le quantità q_i^0, p_α^0 debbono soddisfare le equazioni

$$\frac{\partial \Pi^* (q_i, p_\alpha^0)}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{10}$$

Queste sono *condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza del moto stazionario*. Esse sono ovviamente equivalenti alle condizioni (5) e si ottengono da queste ultime per eliminazione delle quantità p_i $(i = 1, \ldots, m)$. Applicando il teorema di Lagrange alla posizione di equilibrio $q_i = q_i^0$ del sistema ridotto, otteniamo il criterio di stabilità del moto stazionario nella forma seguente.

Un moto con le condizioni iniziali q_i^0, $\dot{q}_i^0 = 0$, p_α^0 $(i = 1, \ldots, m;\ \alpha = m + 1, \ldots, n)$ *è un moto stazionario stabile se il potenziale di Routh* $\Pi^* (q_i, p_\alpha^0)$ *ha un minimo stretto in* $q_i = q_i^0$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Applicando il teorema di Lagrange ad un sistema ridotto, fissiamo i valori costanti dei momenti ciclici $p_\alpha = p_\alpha^0$ $(\alpha = m + 1, \ldots, n)$. Ad ogni modo, il criterio è ancora valido per le variazioni dei momenti p_α^0. Per stabilire questo fatto è sufficiente considerare, per la funzione di Ljapunov, l'integrale del moto

$$[E^* (q_i^0 + \xi_i, \dot{q}_i, p_\alpha^0) - E^* (q_i^0, 0, p_\alpha^0)]^2 + \sum_{\alpha=m+1}^{n} \eta_\alpha^2, \tag{11}$$

dove $E^* = T^* + \Pi^*$ è l'energia totale del sistema ridotto (coincide con l'energia totale del sistema iniziale espressa nei potenziali di Routh q_i, $\dot{q}_i$, p_α (vedi § 48)), mentre $\xi_i = q_i - q_i^0$, $\dot{q}_i$, $\eta_\alpha = p_\alpha - p_\alpha^0$ $(i = 1, \ldots, m;\ \alpha = m + 1, \ldots, n)$ sono le deviazioni del moto perturbato (dal moto stazionario dato). La funzione (11) ha un minimo stretto (uguale a zero) in $\xi_i = 0$, $\dot{q}_i = 0$, $\eta_\alpha = 0$ $(i = 1, \ldots, m;\ \alpha = m + 1, \ldots, n)$.

Il criterio di stabilità di un moto stazionario qui dato fu stabilito in una forma un po' differente da Routh nel 1884.

Esempio. Si determinino i moti stazionari stabili di una sfera non omogenea pesante, su un piano orizzontale, se il centro di gravità della sfera D dista di d dal centro geometrico O, la massa della sfera è M, il momento d'inerzia rispetto all'asse OD è C, e i due altri momenti centrali d'inerzia sono uguali: $A = B$ (fig. 61) [1].

[1] Il corpo rigido considerato in questo problema è un pendolo composto il cui asse di sospensione è l'asse di simmetria dinamica e il punto di supporto O può scorrere liberamente (senza attrito) sul piano orizzontale.

Come coordinate indipendenti, consideriamo le due coordinate orizzontali del centro di gravità x_D, y_D e i tre angoli di Eulero φ, ψ, θ. Qui l'angolo φ è l'angolo di « rotazione pura » intorno all'asse di simmetria dinamica $O\zeta$ passante per i punti D e O; la direzione dell'asse $O\zeta$ coincide con la direzione del vettore $\boldsymbol{DO}$. Scriviamo le espressioni dell'energia cinetica e potenziale:

$$2T = A(p^2+q^2)+Cr^2+M(\dot{x}_D^2+\dot{y}_D^2+\dot{z}_D^2), \quad \Pi = Mgz_D.$$

Qui p, q, r sono le proiezioni della velocità angolare ω sugli assi centrali d'inerzia. Ma

$$p^2+q^2=\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\operatorname{sen}^2\theta, \quad r=\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta, \quad z_D=-d\cos\theta.$$

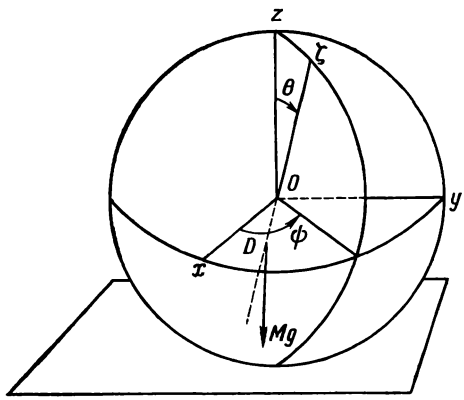


Fig. 61

Dunque,

$$2T=(A+Md^2\operatorname{sen}^2\theta)\dot{\theta}^2+A\dot{\psi}^2\operatorname{sen}^2\theta+Cr^2+M(\dot{x}_D^2+\dot{y}_D^2),$$
$$\Pi=-Mgd\cos\theta.$$

Le coordinate x_D, y_D, φ e ψ sono cicliche. Durante il moto, i momenti propri rimangono costanti, cioè

$$\begin{cases} p_x=M\dot{x}_D=\alpha, \quad p_y=M\dot{y}_D=\beta, \quad p_\varphi=Cr=\gamma, \\ p_\psi=A\dot{\psi}\operatorname{sen}^2\theta+Cr\cos\theta=\delta. \end{cases} \tag{12}$$

Inoltre,

$$p_\theta=(A+Md^2\operatorname{sen}^2\theta)\dot{\theta}.$$

Scriviamo l'espressione della funzione hamiltoniana nelle variabili θ, $p_x = \alpha$, $p_y = \beta$, p_θ, $p_\varphi = \gamma$, $p_\psi = \delta$:

$$H=\frac{p_\theta^2}{2(A+Md^2\operatorname{sen}^2\theta)}+\frac{1}{2A}\left(\frac{\delta-\gamma\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)^2-Mgd\cos\theta+$$
$$+\frac{\alpha^2+\beta^2}{2M}=\frac{p_\theta^2}{A+Md^2\operatorname{sen}^2\theta}+\Pi^*, \tag{13}$$

dove

$$\Pi^* = \frac{1}{2A}\left(\frac{\delta - \gamma\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)^2 - Mgd\cos\theta + \frac{\alpha^2+\beta^2}{2M} \qquad (14)$$

è il potenziale di Routh [1].

Qui le condizioni dell'esistenza del moto stazionario (5) sono della forma

$$\frac{\partial\Pi^*}{\partial\theta} = 0, \qquad p_\theta = 0.$$

Le condizioni di stabilità (la presenza di un estremo stretto della funzione H in $p_\theta = 0$ e in un certo valore desiderato di θ) saranno soddisfatte se per questo valore di θ la funzione Π^* ha un minimo stretto. Per trovare questo valore $\theta = \theta_0$, poniamo $u = \cos\theta$ e

$$f(u) = A\Pi^* = \frac{1}{2}\frac{(\delta-\gamma u)^2}{1-u^2} - Ku + \text{cost} \qquad (K = AMgd).$$

Troviamo

$$f'(u) = \frac{-\gamma\delta u^2 + (\gamma^2+\delta^2)u - \gamma\delta}{(1-u^2)^2} - K,$$

$$f''(u) = \frac{\gamma^2+\delta^2}{(1-u^2)^3}(1 - 3\mu u + 3u^2 - \mu u^3),$$

dove [2]

$$\mu = \frac{2\gamma\delta}{\gamma^2+\delta^2}.$$

Supponiamo che l'equazione $f'(u) = 0$ abbia una radice u tale che $|u| < 1$. È a questo valore $|u| = \cos\theta$ che il moto stazionario di una sfera corrisponde, per il quale il centro della sfera è in moto rettilineo uniforme e gli angoli φ e ψ variano linearmente.

Per provare la stabilità del moto stazionario, dimostreremo prima che $f''(u) > 0$, dove $|u| < 1$. Infatti, se $f''(u)$ fosse nulla, per $|u| < 1$, allora dall'espressione per $f''(u)$ seguirebbe che $\mu = \frac{1+3u^2}{u^3+3u}$. Da questo si vede facilmente che $|\mu| > 1$ per $|u| < 1$, il che è impossibile poiché $\mu = \frac{2\gamma\delta}{\gamma^2+\delta^2}$. Segue che $f''(u) \neq 0$ quando $|u| < 1$, cioè $f''(u)$ mantiene il suo segno nell'intervallo $(-1, +1)$. Ma $f''(0) = \gamma^2 + \delta^2 > 0$. Dunque, $f''(u) > 0$ per $|u| < 1$.

Poiché

$$A\frac{d^2\Pi^*}{d\theta^2} = f''(u)\operatorname{sen}^2\theta - f'(u)\cos\theta = f''(u)\operatorname{sen}^2\theta > 0$$

dunque per il valore di θ qui considerato la funzione Π^* ha un minimo stretto, cioè il moto stazionario corrispondente è stabile.

La condizione per l'esistenza del moto stazionario $f'(u) = 0$ può essere trasformata ponendo $\delta = \gamma u + A\dot\psi(1 - u^2)$.

Se allora poniamo $\gamma = Cr = C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta)$ nell'equazione ottenuta, questa condizione assumerà la forma finale

$$C\dot\varphi\dot\psi + (C - A)\dot\psi^2\cos\theta + Mgd = 0. \qquad (15)$$

[1] Non consideriamo i valori singolari $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. Dunque, $\operatorname{sen}\theta \neq 0$.

[2] Qui $\gamma^2 + \delta^2 > 0$ poiché per $\gamma = \delta = 0$ la funzione $\Pi^* = -Mgd\cos\theta$ ha un minimo stretto in $\theta = 0$.

Questa è la ben conosciuta condizione dell'esistenza della precessione regolare sotto l'azione di un momento esterno Mgd sen θ (il momento di reazione verticale $N = Mg$ rispetto al polo D).

Consideriamo tre casi separati.

1. Se $|Mgd + C\dot{\varphi}\dot{\psi}| > |A - C|\dot{\psi}^2$ allora la condizione (15) non è soddisfatta per ogni valore reale di θ, e allora non esiste nessun moto stazionario con queste velocità angolari.

2. Se $|Mgd + C\dot{\varphi}\dot{\psi}| < |A - C|\dot{\psi}^2$ e le quantità $Mgd + C\dot{\varphi}\dot{\psi}$ e $A - C$ hanno lo stesso segno, allora per tali velocità angolari esiste un moto stazionario con $\cos\theta > 0$.

3. Ma se $|Mgd + C\dot{\varphi}\dot{\psi}| < |A - C|\dot{\psi}^2$ e le quantità $Mgd + C\dot{\varphi}\dot{\psi}$ e $A - C$ hanno segno differente, allora $\cos\theta < 0$ nel caso di moto stazionario. In questo caso *esiste un moto stazionario stabile tale che il centro di gravità è localizzato sopra il centro geometrico della sfera.*

Ora consideriamo dei casi particolari.

a) $\theta_0 = 0$. Allora dalle formule (12) segue che $\gamma = \delta$. Dunque,

$$f'(u) = -\frac{\gamma^2}{(1+u)^2} - K,$$

$$A\left(\frac{d\Pi^*}{d\theta}\right)_{\theta=0} = f'(u)(-\operatorname{sen}\theta_0) = 0,$$

$$A\left(\frac{d^2\Pi^*}{d\theta^2}\right)_{\theta=0} = f'(u)(-\cos\theta_0) = \frac{\gamma^2}{(1+u_0)^2} + K > 0.$$

Il moto stazionario è sempre stabile.

b) $\theta_0 = \pi$. Dalle formule (12) troviamo $\gamma = -\delta$. Dunque,

$$f'(u) = \frac{\gamma^2}{(1-u)^2} - K,$$

$$A\left(\frac{d\Pi^*}{d\theta}\right)_{\theta=\pi} = f'(u)(-\operatorname{sen}\theta_0) = 0,$$

$$A\left(\frac{d^2\Pi^*}{d\theta^2}\right)_{\theta=\pi} = f'(u)(-\cos\theta_0) = \frac{\gamma^2}{(1-u_0)^2} - K = \frac{\gamma^2}{4} - K.$$

Il moto stazionario sarà stabile se è soddisfatta la condizione

$$\frac{\gamma^2}{4} > K,$$

che in forma estesa diventa

$$C^2r^2 > 4\,AMgd. \tag{16}$$

Se la disuguaglianza (16) è vera, allora, sebbene nel caso qui considerato il centro di gravità si trova sopra il centro geometrico della sfera, la rotazione intorno all'asse verticale sarà un moto stazionario stabile.

Indice analitico

Accelerazioni generalizzate 43
Affix (di un numero complesso) 200
Angolo, di nutazione 36
  di precessione 36
  di pura rotazione 36
Appell, equazioni di 58, 62
  per un sistema non olonomo 58
Approssimazione lineare per il sistema non lineare 193
Autovalori 190
Autovettore 191
Azione, elementare 89
  lagrangiana 114

Bolzano — Weierstrass, lemma di 179

Canonicità di una trasformazione 158
Caratteristica, ampiezza-fase 235, 236
  di frequenza 236
Četaev, criterio d'instabilità di 186
  teorema di 176
Circolazione della velocità 107
Coefficiente d'influenza 224
Conservazione del flusso del vortice, teorema della 108
Conservazione della circolazione della velocità, teorema della 107
Compatibilità con i vincoli 26
Coordinate, cicliche 81
  cinosteniche 83
  ignorabili 81, 83
  indipendenti generalizzate 35
  non cicliche 81, 242
  normali 174, 213
  di posizioni 242
  principali 174, 213
Conservazione dell'energia, legge della 78
Coriolis, forze di 54
Corpo libero 19, 36

D'Alembert, principio di 25, 32
Deviazioni 166
Dirichlet, teorema di 169
Dissipazione dell'energia totale 5
Donkin, teorema di 74

Energia, integrale della 52
  potenziale 50
  totale 49, 51
  totale generalizzata 77
Equazione, caratteristica 190
  delle frequenze 206
  generale della dinamica 21, 92
  secolare 190, 206, 230
Equazioni di Lagrange, in coordinate indipendenti 41, 43
  per forze potenziali 67
  del primo tipo 21, 23
  del secondo tipo 41, 43, 64
  del secondo tipo in coordinate indipendenti 43
Espressione associata (di una funzione) 73
Eulero, angoli di (euleriani) 36
  equazioni differenziali di 92
  equazioni di 66
  equazioni dinamiche di 65
  formula di 51
  teorema sulle funzioni omogenee di 77

Fermat, principio ottico di 116
Filtro 238
Forza di Lorentz 68
Forze, di reazione dei vincoli 16
  dissipative 49, 53

effettive 38
generalizzate 38, 61, 68
giroscopiche 49, 53, 68
potenziali 49, 50, 68
Funzione, generatrice 132
hamiltoniana 74
lagrangiana 67
Fuoco cinetico coniugato 97

Gradi di libertà 15
Grado di stabilità 192
Gruppo 129
Gruppo simpliciale 162

Hamilton, azione (nel senso) di 89
equazioni di 74
equazioni canoniche di 72, 74
funzione principale di 139
principio di 89, 90
seconda forma del principio di 97
Hamilton — Jacobi, equazione di 136, 137
Hamilton — Ostrogradskij, principio di 90
Helmholtz, teorema di 106, 111
Hessiano 75
piccolo 79
Hurwitz, determinanti di 199
polinomio di 209

Insieme statistico 127
Integrale, completo 137
delle equazioni del moto 84
generalizzato dell'energia 77
Invariante integrale 119
assoluto 122
di base della meccanica 99
nello spazio di coordinate esteso 107
relativo 122
universale 122
Invarianza del volume nello spazio delle fasi 125
Ipotesi di realizzazione di forze di reazione ammissibili 21
Interpretazione idrodinamica dell'invariante integrale di base 106

Jacobi, equazioni di 111
teorema di 137
Jacobi — Poisson, teorema di 86
Jacobiana, matrice funzionale 48
Jacobiano 72, 75

Keplero, le tre leggi del moto planetario di 148
Kronecker, simbolo di 160, 189

Lagrange, moltiplicatori indeterminati di 22, 23
parentesi di 158, 160
studio delle equazioni di 46
teorema di 169
teorema di, sulla stabilità di una posizione di equilibrio 166
Legendre, trasformazioni di 74
Lee Hwa-chung, teorema di 119, 123
Liénard — Chipart, condizioni di 199
criterio di 202
Linea, dei nodi 36
fluida 108
Linee, di vortice 110
geodetiche 117
più corte dello spazio, le 118
spostate 110
Liouville, teorema di 125, 128
Lorentz, forza di 68
Ljapunov, corollario al teorema di 184
funzione di 184
primo teorema di 174
secondo teorema di 176
teorema di 182, 183

Matrice jacobiana, natura simpliciale della 161
di ordine n 161
Matrici, definite positive 206
oscillatorie 225
simpliciali generalizzate 163
Massiminimali, proprietà 219
Maupertuis — Lagrange, principio di minima azione di 111, 115
Maxwell, principio di reciprocità di 224
Meccanica analitica 7, 8
Mersenne, legge di 228
Michajlov, criterio di 202
Minimassimali, proprietà 220
Momenti generalizzati 72
Momento giroscopico 54
Moti nascosti 247
Moto kepleriano 147
Moto stazionario, condizioni per l'esistenza del 251, 254
criterio di stabilità di un 253
stabile 254
stabilità del 254

Newton, legge della gravitazione di 148

Oscillazioni, forzate 217
libere 217
principali 210

Pendolo doppio 36
Poincaré, integrale di 122
invarianza dell'integrale di, integrazione geometrica 121
Poincaré — Cartan, integrale di 104, 105
invariante integrale di 99, 102
Poisson, parentesi di 85
identità di 85
invarianza delle parentesi di, in una trasformazione canonica 163
Posizione, asintoticamente stabile 176
di equilibrio 25, 41
instabile 167
stabile 166, 167
Potenza delle forze non potenziali 51
Potenziale, cinetico 67
delle forze 50
generalizzato 67, 68
Principio degli spostamenti possibili 26, 30
Principio degli spostamenti virtuali 25, 26
Prova del carattere canonico di una trasformazione 158
Pseudoaccelerazioni 61
Pseudocoordinate 58, 60
Pseudovelocità 60

Rayleigh, funzione dissipativa di 55, 231
funzioni di 233
teorema di 217
Regola d'oro della meccanica 26
Risonanza 216
Rotore (della velocità) 108
Routh, equazioni di 79, 80
funzione di 79
potenziale di 241, 244
variabili di 79, 241, 242
Routh — Hurwitz, condizione di 199

Separazione, teorema della 222
Separazione delle variabili, metodo di 142
Sistema, autonomo (di equazioni differenziali) 82
conservativo generalizzato 77, 111
dissipativo definito 55
dissipativo 53
giroscopicamente libero 245
non olonomo 11, 58
non naturale 11
olonomo 11, 35
olonomo reonomo 11
olonomo scleronomo 11
reonomo 11
ridotto 241, 245
scleronomo 11, 37
Sistemi, liberi 9
naturali 71
vincolati 9
Soluzione, asintoticamente stabile 185
stabile 185
Spettro complesso 238
Spostamenti infinitesimi possibili 13
possibili 13
virtuali 13
Stabilità, condizionata 182
criterio geometrico di 201
dei moti stazionari 251
dei sistemi lineari 189
Stabilità asintotica di una posizione di equilibrio 176
di sistemi lineari, criteri di 198
teorema sulla 178
Stabilità di un sistema dissipativo, teorema sulla 181
Superficie liquida 108

Teoria delle perturbazioni, applicazioni delle trasformazioni canoniche alla 151
Termini secolari 192, 210
Thomson, teorema di 106
Torricelli, principio di 27
Traiettorie, curvilinee 90
rettilinee 90
Trasformazione(i) canonica(che) 129
libere 133
non puntiforme 136
non libera 133, 134
puntiforme 136
struttura di una arbitraria 153
univalente 132
valenza della 132
Trasformazioni di contatto 132

Variabili hamiltoniane 72
lagrangiane 72

Velocità, generalizzata 43, 67
possibili 12
Vincolo(i) 15
bilaterale 12
cinematico 9
classificazione dei 9
«congelato» 13
differenziale 9
differenziale stazionario 11
finito 9
finito, integrabile 10
finito, stazionario, 10
geometrico 9
ideale 17
non olonomo 11
non stazionario 11
rigido 12
semiolonomo 11
unilaterale 12
Vortice (della velocità) 108

Whittaker, equazioni di 111, 112